Université Claude Bernard Lyon 1

Licence 2 – Introduction aux courbes et surfaces

Examen, première session

Mercredi 17 juin 2009 - Durée 2 heures

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Les exercices sont indépendants les uns des autres. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier. Dans les questions, I est un intervalle ouvert non vide et $\mathcal{U}$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.

1.– Si $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe paramétrée de classe C^1 alors il existe un reparamétrage $\varphi : J \longrightarrow I$ tel que $\delta = \gamma \circ \varphi$ soit paramétrée par la longueur d'arc.

2.– Si $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $t \longmapsto (x(t), y(t), z(t))$ est régulière alors la courbe paramétrée $\delta : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (x(t), y(t))$ est elle aussi régulière.

3.– Si $\delta : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (x(t), y(t))$ est régulière et si $z : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 quelconque alors $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $t \longmapsto (x(t), y(t), z(t))$ est elle aussi régulière.

4.– Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ régulière et de classe C^∞. Si la courbure de γ est constante et non nulle, alors le support de γ est inclus dans un cercle.

5.– Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ régulière et de classe C^∞. Si la courbure *algébrique* de γ est constante et non nulle, alors le support de γ est inclus dans un cercle.

6.– Soit γ un lacet régulier du plan, alors le support de γ sépare le plan en deux composantes, l'une bornée l'autre non.

7.– Soient $f_0, f_1 : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ deux courbes régulières ne passant pas par $O = (0,0)$. Si elles ont le même indice de rotation (*i.e.* $I(f_0) = I(f_1)$) alors elles ont le même nombre de tours par rapport à O (*i.e.* $N(f_0, O) = N(f_1, O)$).

8.– Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(u, v) \longmapsto f(u, v)$ de classe C^1. Alors f est régulière si et seulement si, en tout point $(u, v) \in \mathcal{U}$ on a $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \neq 0$ et $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \neq 0$.

9.– La surface $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = xy\}$ est une surface réglée.

10.– On note h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par $h(x, y, z) = (\frac{1}{100}x, y, 100z)$ et $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface réglée. Alors $h \circ f$ est une surface réglée.

Exercice 1. – On considère la courbe paramétrée donnée par

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (\cos^3 t, \sin^3 t). \end{array}$$

1) Déterminer les points réguliers de γ.

2) Montrer que :
   a) l'axe (Ox) est un axe de symétrie de la courbe,
   b) l'axe (Oy) est un axe de symétrie de la courbe,
   c) la première bissectrice $\{y = x\}$ est un axe de symétrie de la courbe.

3) Tracer sommairement le support de γ.

4) Exprimer l'aire enclose par γ au moyen d'une intégrale simple qu'on ne cherchera pas à déterminer.

Exercice 2. – Soit $(p, q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ et $b > a > 0$. On considère la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} x(t) = (b + a\cos pt)\cos qt \\ y(t) = (b + a\cos pt)\sin qt \\ z(t) = a\sin pt \end{array} \right. \end{array}$$

1) Montrer que γ est régulière.

2) Montrer que le support de γ est inclu dans le tore $T = f([0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$

où

$$f: \begin{array}{ccc} [0,2\pi]\times[0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\theta,\varphi) & \longmapsto & \left\{\begin{array}{l} (b+a\cos\theta)\cos\varphi \\ (b+a\cos\theta)\sin\varphi \\ a\sin\theta \end{array}\right. \end{array}$$

3) On note $\delta : [0,2\pi] \longrightarrow (Oxy)$, $t \longmapsto (x(t),y(t))$ la projection de γ dans le plan (Oxy). Montrer que δ est régulière puis calculer son indice de rotation.

4) On note $\rho : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe plane donnée par

$$t \longmapsto \left(\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}, z(t)\right).$$

Montrer que ρ est régulière puis calculer son indice de rotation.

Exercice 3. – On considère la surface paramétrée suivante :

$$f: \begin{array}{ccc} [0,2\pi]\times]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & \left(\left(2-v\sin\frac{u}{2}\right)\sin u, \left(2-v\sin\frac{u}{2}\right)\cos u, v\cos\frac{u}{2}\right) \end{array}$$

1) Montrer que f est régulière.

2) Montrer que f est une surface réglée (les règles sont des intervalles ouverts).

3) Donner une expression explicite d'une base du plan tangent en tout point $f(u,v)$ avec $(u,v)\in[0,2\pi]\times]-1,1[$.

4) Donner une expression explicite de la normale unitaire N en tout point $f(u,v)$ avec $(u,v)\in[0,2\pi]\times]-1,1[$.

5) Montrer que pour tout $v\in]-1,1[$, on a $f(0,v)=f(2\pi,-v)$. A-t-on $N(0,v)=N(2\pi,-v)$?

6) a) Décrire géométriquement l'image de f.
   b) Expliquer le résultat de la question 5.