Université Claude Bernard Lyon 1

Licence 2 – Courbes et surfaces

Corrigé du contrôle continu final, première session

Mercredi 16 juin 2010 - Durée 2 heures

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Les deux exercices sont indépendants. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier. Dans les questions, I est un intervalle ouvert non vide et toutes les applications sont C^∞ sauf mention explicite du contraire.

1.– Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f'(0) = 0$. La courbe paramétrée $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (t, f(t))$ n'est pas régulière en $t = 0$.

Rép.– Faux car $\gamma'(0) = (1, 0) \neq (0, 0)$.

2.– La courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (t, 2t)$ est birégulière.

Rép.– Faux car $\gamma''(0) = (0, 0)$

3.– Si une courbe paramétrée n'a pas de point d'inflexion alors elle est birégulière.

Rép.– Faux la courbure algébrique peut s'annuler sans changer de signe

4.– Soient $b > a > 0$ et $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (a\cos t, b\sin t)$. L'aire du domaine délimité par γ vaut $\dfrac{ab}{2}$.

Rép.– Faux, l'aire vaut πab.

5.– Soit γ la courbe paramétrée de la question précédente et $P, Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions C^∞ quelconques alors $\int_\gamma P(x)dx + Q(y)dy = 0$.

Rép.– Vrai, il suffit d'appliquer la formule de Green-Riemann pour le vérifier.

6.– Soit $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (\cos t, \sin 2t)$. L'indice de rotation de rotation de f vaut 2.

Rép.– Faux, il vaut 0.

7.– Soit f l'application de la question précédente. Le nombre de rotation de f par rapport au point de coordonnées $(100, 100)$ vaut 2.

Rép.– Faux, il vaut 0.

8.– La surface paramétrée $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie ci-dessous est régulière :

$$(u, v) \longmapsto ((2 + \cos u)\cos v, (2 + \cos u)\sin v, \sin u).$$

Rép.– Vrai, il suffit de faire le calcul.

9.– Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $s \longmapsto (x(s), z(s))$ une courbe paramétrée régulière et $f : [a, b] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(s, \theta) \longmapsto (x(s)\cos\theta, x(s)\sin\theta, z(s))$. L'aire de la surface paramétrée f est

$$2\pi \int_a^b x(s)ds.$$

Rép.– Vrai, l'élément d'aire vaut $|x(s)|\sqrt{x'(s)^2 + z'(s)^2}dsd\theta$ et comme $x(s) > 0$ et $\sqrt{x'(s)^2 + z'(s)^2} = 1$, il se réduit à $x(s)dsd\theta$.

10.– La surface $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1\}$ admet un des axes de coordonnées comme axe de rotation.

Rép.– Faux, pas de groupement en $x^2 + y^2$ ou $y^2 + z^2$ ou $z^2 + x^2$.

Exercice 1. – Soient I un intervalle qui contient 0 et $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe régulière paramétrée par la longueur d'arc. On suppose que γ admet en $s = 0$ un cercle osculateur $\mathcal{C}$ de centre l'origine, de rayon $R > 0$ et dont une paramétrisation est donnée par :

$$\begin{array}{rccl} \delta : & [0, 2\pi R] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & s & \longmapsto & (R\cos\frac{s}{R}, R\sin\frac{s}{R}). \end{array}$$

On note $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $f(s) := \langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle$.

1) Pour quelle raison $f'(0) = 0$?

Rép.– Notons que δ comme γ sont des paramétrisations par la longueur d'arc. D'après le cours, la courbe δ (le cercle osculateur) approxime la courbe à l'ordre 2. En particulier $\delta'(0) = \pm\gamma'(0)$. Puisque $\langle \delta(0), \delta'(0) \rangle = 0$ on a donc $\langle \gamma(0), \gamma'(0) \rangle = 0$ et par conséquent $f'(0) = 0$.

2) Montrer que $f''(0) = 0$.

Rép.– On a $f''(0) = 2\langle \gamma''(0), \gamma(0) \rangle + 2\langle \gamma'(0), \gamma'(0) \rangle = 2\langle k(0)N(0), \gamma(0) \rangle + 2$.
Or $\gamma(0) = \delta(0) = -RN(0) = -\dfrac{1}{k(0)}N(0)$. Donc $f''(0) = -2 + 2 = 0$.

3) Montrer que $f'''(0) = -\dfrac{2k'(0)}{k(0)}$ où $k : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est la courbure principale de γ.

Rép.– On a $f'''(0) = 2\langle \gamma'''(0), \gamma(0) \rangle + 6\langle \gamma''(0), \gamma'(0) \rangle$.
Or $\langle \gamma''(0), \gamma'(0) \rangle = 0$ et $\gamma'''(0) = (kN)' = k'(0)N(0) + k(0)N'(0)$.
Puisque $\gamma(0) = -\dfrac{1}{k(0)}N(0)$ on a donc

$$f'''(0) = 2\langle k'(0)N(0) + k(0)N'(0), -\frac{1}{k(0)}N(0) \rangle = -\frac{2k'(0)}{k(0)}.$$

4) Montrer que :

$$\forall s \in I, \qquad f(s) - R^2 = -\frac{k'(0)}{3k(0)}s^3 + o(s^3).$$

Rép.– Il suffit d'écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 pour l'application f. Le nombre $f(0)$ est le carré de la distance du point $\gamma(0)$ à l'origine, c'est-à-dire au centre du cercle osculateur. Ainsi $f(0) = R^2$.

5) On suppose $k'(0) \neq 0$. Montrer que le support de γ traverse le cercle osculateur $\mathcal{C}$.

Rép.– Si $k'(0) \neq 0$ et d'après la question 4) $f(s) - R$ change de signe au voisinage de 0 ce qui montre que γ traverse le cercle osculateur en $s = 0$.

Exercice 2. – Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe birégulière paramétrée par la longueur d'arc.

1) Donner une paramétrisation de la développée β de γ (on rappelle que la développée d'une courbe plane est le lieu de ses centres de courbure).

Rép.– $\beta(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k(s)} N(s)$.

2) On note $R : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, la fonction $R(s) = k(s)^{-1}$ où $k : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est la courbure principale de γ. Montrer que :

$$Long(\beta) = \int_I |R'(s)| ds.$$

Rép.– $\beta'(s) = -\dfrac{k'(s)}{k^2(s)} N(s) = R'(s) N(s)$ d'où la formule demandée.

3) On suppose désormais que k' ne s'annule pas. Soient s_1, s_2 dans I, $s_1 < s_2$, montrer que la longueur d'arc entre $\beta(s_1)$ et $\beta(s_2)$ est $|R(s_2) - R(s_1)|$.

Rép.– Si k' ne s'annule pas alors $R'(s)$ garde un signe constant et

$$\int_{[s_1, s_2]} |R'(s)| ds = \left| \int_{s_1}^{s_2} R'(s) ds \right| = |R(s_2) - R(s_1)|.$$

4) Soient C_1 et C_2 deux cercles de centre respectif Ω_1 et Ω_2 et de rayon R_1 et R_2. Montrer que si $dist(\Omega_1, \Omega_2) < |R_2 - R_1|$ alors les deux cercles sont disjoints : $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. (*Suggestion.*– Supposer le contraire et faire jouer l'inégalité triangulaire).

Rép.– Supposons $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Soit $\{A\} = C_1 \cap C_2$. Pour fixer les idées, on suppose $R_2 > R_1$. L'inégalité triangulaire s'écrit

$$dist(\Omega_2, A) \leq dist(\Omega_1, A) + dist(\Omega_1, \Omega_2)$$

c'est-à-dire

$$R_2 \leq R_1 + dist(\Omega_1, \Omega_2) < R_1 + (R_2 - R_1) = R_2$$

Contradiction.

5) Montrer que si k' ne s'annule pas alors les cercles osculateurs de γ sont deux à deux disjoints (ce résultat s'appelle le *théorème de Tait*, il a été démontré

en 1895).

Rép.– Soient s_1, s_2 dans I. Notons C_1 (resp. C_2) le cercle osculateur à γ en $\gamma(s_1)$ (resp. en $\gamma(s_2)$). Le cercle C_1 (resp. C_2) a pour centre $\Omega_1 := \beta(s_1)$ (resp. $\Omega_2 := \beta(s_2)$) et pour rayon $R_1 := R(s_1)$ (resp. $R_2 := R(s_2)$). La distance entre les deux centres $\beta(s_1)$ et $\beta(s_2)$ est plus petite que la longueur de $\beta_{|[s_1,s_2]}$, donc

$$dist(\Omega_1, \Omega_2) \leq |R_2 - R_1|.$$

En fait, cette inégalité est stricte car le support d'une développée n'est jamais une portion de droite. En effet, d'après l'expression de β', il faudrait pour cela que $N(s)$ soit constant, donc que le support de γ soit une droite mais alors γ ne serait plus birégulière

D'après la question 4, on a donc $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.