Université Claude Bernard Lyon 1

Licence 2 – Courbes et surfaces

Contrôle continu final

Jeudi 16 juin 2011 - Durée 2 heures

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Les deux exercices sont indépendants. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier. Dans les questions, I est un intervalle ouvert non vide et toutes les applications sont C^∞ sauf mention explicite du contraire.

1.– Il n'existe pas de courbe paramétrée de classe C^1 dont le support soit $\Gamma = \{(0,y)\ |y \in \mathbb{R}_+\} \cup \{(x,0)\ |x \in \mathbb{R}_+\}$.

2.– Le support de la courbe $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $t \longmapsto (\cos(\cos t), \sin(\cos(t)), \cos(t))$ est inclu dans une sphère.

3.– La courbe polaire $\rho(\theta) = \dfrac{1}{\sin\theta}$ où $\theta \in]0, \pi[$ a pour support une droite.

4.– Soient $O = (0,0)$ et $A = (2,0)$ deux points du plan et $P = [O,A] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Alors, il existe une courbe plane birégulière à courbure constante ≥ 1 joignant O et A et dont le support est contenu dans P.

5.– Soit $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$. L'aire du domaine délimité par γ vaut $\dfrac{3\pi}{8}$.

6.– Soit $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe plane birégulière fermée. Si le support de γ est un cercle alors l'indice de rotation de γ vaut ± 1.

7.– Soit $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple C^2 et r une réflexion quelconque du plan, alors $Ind(r \circ \gamma) = -Ind(\gamma)$.

8.– Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante alors la surface paramétrée $(u,v) \longmapsto (h(u)\cos v, h(u)\sin v, u)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ est régulière.

9.– L'aire de la surface paramétrée $(u,v) \longmapsto ((2+\cos u)\cos v, (2+\cos u)\sin v, \sin u)$, $(u,v) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi]$, vaut $8\pi^2$.

10.– L'hélicoïde $(u,v) \longmapsto (v\cos u, v\sin u, v)$ ne possède aucun plan tangent contenant une droite verticale.

Exercice 1 (Une courbe *couture de la balle de tennis*). – Soient a, b deux réels strictement positifs. On considère la courbe $\gamma : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$t \longmapsto \gamma(t) = \begin{cases} x(t) = a\cos t + b\cos 3t \\ y(t) = a\sin t - b\sin 3t \\ z(t) = 2\sqrt{ab}\sin 2t \end{cases}$$

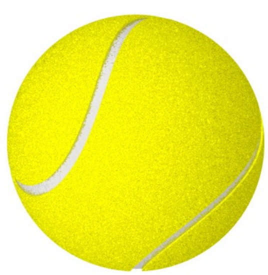
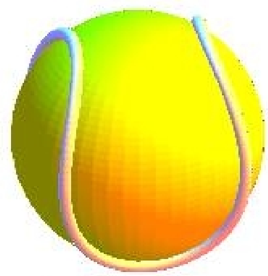
1) Déterminer les points réguliers de γ.

2) Montrer que le support Γ de γ est inclus dans une sphère que l'on déterminera.

3) Soit r la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'angle π autour de la verticale (on dit que r est un *retournement*). Montrer que le support de γ est invariant par r.

4) Déterminer les points d'intersection de Γ avec l'équateur de la sphère.

5) Pour quelle(s) valeur(s) de b la courbe a-t-elle une tangente verticale aux points d'intersection avec l'équateur ?

Exercice 2 (Surfaces cyclotomiques).– Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.. A toute courbe polaire $\rho : I \overset{C^\infty}{\longrightarrow} \mathbb{R}_+$ on associe la surface paramétrée

$f : I \times [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$(u,v) \longmapsto f(u,v) = \begin{cases} x(u,v) = \rho(u)\cos u \cos v \\ y(u,v) = \rho(u)\sin u \cos v \\ z(u,v) = \rho(u)\sin v \end{cases}$$

1) Montrer que f est régulière si et seulement si ρ est régulière.

2) On suppose que f est régulière. Donner l'expression d'une normale en (u,v) à f.

3) On suppose désormais que $\rho : \mathbb{R} \overset{C^\infty}{\longrightarrow} \mathbb{R}_+^*$. Montrer que le support de f est une union infinie de cercles.

4) Montrer que si ρ est strictement monotone alors f n'a pas de point double (i. e. est injective).

5) On suppose que $\rho :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_*^+$, $u \longmapsto u$ (i.e. ρ est l'identité !). Déterminer l'aire de f.