Université Claude Bernard Lyon 1

Licence 2 – Courbes et surfaces

Corrigé du contrôle continu final

Jeudi 16 juin 2011 - Durée 2 heures

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Les deux exercices sont indépendants. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier. Dans les questions, I est un intervalle ouvert non vide et toutes les applications sont C^∞ sauf mention explicite du contraire.

1.– Il n'existe pas de courbe paramétrée de classe C^1 dont le support soit $\Gamma = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}_+\} \cup \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}_+\}$.

Rép.– Faux, choisir $\gamma(t) = (0, t^2)$ si $t \leq 0$ et $\gamma(t) = (t^2, 0)$ si $t > 0$.

2.– Le support de la courbe $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (\cos(\cos t), \sin(\cos(t)), \cos(t))$ est inclu dans une sphère.

Rép.– Faux, le support de γ est celui d'une hélice circulaire.

3.– La courbe polaire $\rho(\theta) = \dfrac{1}{\sin\theta}$ où $\theta \in]0, \pi[$ a pour support une droite.

Rép.– Vrai, son support est une droite horizontale passant par le point $(0, 1)$.

4.– Soient $O = (0, 0)$ et $A = (2, 0)$ deux points du plan et $P = [O, A] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Alors, il existe une courbe plane birégulière à courbure constante ≥ 1 joignant O et A et dont le support est contenu dans P.

Rép.– Faux, les supports des courbes planes birégulières à courbure constante sont des arcs de cercles. Puisque la courbure est ≥ 1, le support contient nécessairement un demi-cercle de rayon 1 centré en $(1, 0)$. Ce support n'est pas contenu dans P.

5.– Soit $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$. L'aire du domaine délimité par γ vaut $\dfrac{3\pi}{8}$.

Rép.– Vrai, appliquer la formule de Green-Riemann pour le vérifier.

6.– Soit $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe plane birégulière fermée. Si le support de γ est un cercle alors l'indice de rotation de γ vaut ± 1.

Rép.– Faux, γ peut parcourir plusieurs fois son support...

7.– Soit $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple C^2 et r une réflexion quelconque du plan, alors $Ind(r \circ \gamma) = -Ind(\gamma)$.

Rép.– Vrai, une réflexion change le sens des bases donc $k_{alg}(r \circ \gamma) = -k_{alg}(\gamma)$ et la formule $Ind(\gamma) = -\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} k_{alg}(t) \|\gamma'(t)\| dt$ permet de conclure.

8.– Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante alors la surface paramétrée $(u, v) \longmapsto (h(u) \cos v, h(u) \sin v, u)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ est régulière.

Rép.– Faux, elle est irrégulière aux points (u, v) tels que $h(u) = 0$.

9.– L'aire de la surface paramétrée $(u, v) \longmapsto ((2+\cos u) \cos v, (2+\cos u) \sin v, \sin u)$, $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, vaut $8\pi^2$.

Rép.– Vrai, il suffit de faire le calcul.

10.– L'hélicoïde $(u, v) \longmapsto (v \cos u, v \sin u, v)$ ne possède aucun plan tangent contenant une droite verticale.

Rép.– Faux, les plans tangents aux points $(u, 0)$ contiennent la droite verticale passant par l'origine.

Exercice 1 (Une courbe *couture de la balle de tennis*). – Soient a, b deux réels strictement positifs. On considère la courbe $\gamma : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$t \longmapsto \gamma(t) = \begin{cases} x(t) = a\cos t + b\cos 3t \\ y(t) = a\sin t - b\sin 3t \\ z(t) = 2\sqrt{ab}\sin 2t \end{cases}$$

1) Déterminer les points réguliers de γ.

Rép.– On a

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\|^2 &= (-a\sin t - 3b\sin 3t)^2 + (a\cos t - 3b\cos 3t)^2 + 4ab(2\cos 2t)^2 \\ &= a^2 + 9b^2 - 6ab(\cos 3t\cos t - \sin 3t\sin t) + 8ab(1+\cos 4t) \\ &= a^2 + 9b^2 - 6ab\cos 4t + 8ab(1+\cos 4t) \\ &= a^2 + 9b^2 + 8ab + 2ab\cos 4t \\ &= a^2 + 9b^2 + 6ab + 2ab(1+\cos 4t) \\ &= (a+3b)^2 + 4ab\cos^2 2t. \end{aligned}$$

Tous les points sont donc réguliers.

2) Montrer que le support Γ de γ est inclus dans une sphère que l'on déterminera.

Rép.– On a

$$\begin{aligned} \|\gamma(t)\|^2 &= (a\cos t + b\cos 3t)^2 + (a\sin t - b\sin 3t)^2 + 4ab\sin^2 2t \\ &= a^2 + b^2 + 2ab(\cos t\cos 3t - \sin t\sin 3t) + 2ab(1-\cos 4t) \\ &= a^2 + b^2 + 2ab\cos 4t + 2ab(1-\cos 4t) \\ &= (a+b)^2. \end{aligned}$$

Le support de γ est donc inclus dans une sphère de centre l'origine et de rayon $a+b$.

3) Soit r la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'angle π autour de la verticale (on dit que r est un *retournement*). Montrer que le support de γ est invariant par r.

Rép.– On a d'une part $r(x,y,z) = (-x,-y,z)$ et d'autre part $\gamma(t+\pi) = (-x(t), -y(t), z(t)$ d'où la conclusion.

4) Déterminer les points d'intersection de Γ avec l'équateur de la sphère.

Rép.– Il suffit de résoudre l'équation $z(t) = 0$ et on trouve $t = 0$, $\frac{\pi}{2}$, π et $\frac{3\pi}{2}$. Les points correspondants sont

$$\gamma(0) = (a+b,0,0),\ \ \gamma(\frac{\pi}{2}) = (0,a+b,0),\ \ \gamma(\pi) = (-(a+b),0,0),\ \ \gamma(\frac{3\pi}{2}) = (0,-(a+b),0).$$

5) Pour quelle(s) valeur(s) de b la courbe a-t-elle une tangente verticale aux points d'intersection avec l'équateur ?

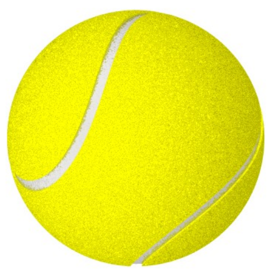
Rép.– On a

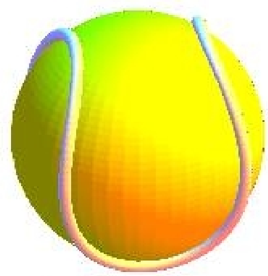
$$\gamma'(0) = (0, a - 3b, 4\sqrt{ab}), \quad \gamma'(\frac{\pi}{2}) = (-a + 3b, 0, -4\sqrt{ab})$$

et

$$\gamma'(\pi) = (0, -a + 3b, 4\sqrt{ab}), \quad \gamma'(\frac{3\pi}{2}) = (a - 3b, 0, -4\sqrt{ab}).$$

Par conséquent, la courbe a une tangente verticale aux points d'intersection avec l'équateur ssi $b = \frac{a}{3}$.





Exercice 2 (Surfaces cyclotomiques).– Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.. A toute courbe polaire $\rho : I \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}_+$ on associe la surface paramétrée $f : I \times [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$(u, v) \longmapsto f(u, v) = \begin{cases} x(u, v) = \rho(u) \cos u \cos v \\ y(u, v) = \rho(u) \sin u \cos v \\ z(u, v) = \rho(u) \sin v \end{cases}$$

1) Montrer que f est régulière si et seulement si ρ est régulière.

Rép.– On a

$$f_u(u, v) = \begin{pmatrix} \rho'(u) \cos u \cos v \\ \rho'(u) \sin u \cos v \\ \rho'(u) \sin v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\rho(u) \sin u \cos v \\ \rho(u) \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_v(u, v) = \begin{pmatrix} -\rho(u) \cos u \sin v \\ -\rho(u) \sin u \sin v \\ \rho(u) \cos v \end{pmatrix}$$

D'où

$$(f_u \wedge f_v)(u, v) = \rho'(u)\rho(u) \begin{pmatrix} \sin u \\ -\cos u \\ 0 \end{pmatrix} + \rho^2(u) \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\|f_u \wedge f_v(u,v)\| = \rho(u)\sqrt{\rho'^2(u)+\rho^2(u)}.$$

2) On suppose que f est régulière. Donner l'expression d'une normale en (u,v) à f.

Rép.– Une normale, non nécessairement unitaire, est donnée par $f_u \wedge f_v$ dont l'expression figure ci-dessus.

3) On suppose désormais que $\rho : \mathbb{R} \overset{C^\infty}{\longrightarrow} \mathbb{R}_+^*$. Montrer que le support de f est une union infinie de cercles.

Rép.– Soit $u_0 \in I$ alors $v \longmapsto f(u_0,v)$ est un cercle de rayon $\rho(u) > 0$. Notons-le C_{u_0}. Soit Σ le support de f, on a donc

$$\Sigma = \bigcup_{u\in I} C_u.$$

4) Montrer que si ρ est strictement monotone alors f n'a pas de point double (i. e. est injective).

Rép.– En effet, $f(u_1,v_1) = f(u_2,v_2)$ entraîne $\|f(u_1,v_1)\| = \|f(u_2,v_2)\|$. Puisque $\|f(u,v)\| = \rho(u)$ cela entraîne $\rho(u_1) = \rho_(u_2)$, et comme ρ est injective (car strictement monotone) on a donc $u_1 = u_2$. D'après 3), (u_1,v_1) et (u_1,v_2) sont dans le même cercle C_{u_1} et ils ne coïncident que si $v_1 = v_2$.

5) On suppose que $\rho :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_*^+$, $u \longmapsto u$ (i.e. ρ est l'identité !). Déterminer l'aire de f.

Rép.– On a (question 1)

$$Aire(f) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho(u)\sqrt{\rho'^2(u)+\rho^2(u)}dudv$$

soit ici

$$Aire(f) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 u\sqrt{1+u^2}dudv.$$

Or,

$$\left(\frac{1}{3}(1+u^2)^{\frac{3}{2}}\right)' = u\sqrt{1+u^2}$$

d'où

$$Aire(f) \quad = \quad 2\pi[\frac{1}{3}(1+u^2)^{\frac{3}{2}}]_0^1 \quad = \quad \frac{2^{\frac{5}{2}}}{3}\pi.$$