L2. Application du calcul différentiel aux courbes et surfaces

Mercredi 27 Juin 2007. Durée : 1h30
Les notes de cours sont autorisées.

Problème 1. On étudie la famille de courbes planes Γ_c de $\mathbb{R}^2$ définie par l'équation

$$x^{10} - xy + y^{10} = c$$

avec $c \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer les valeurs de c pour lesquels Γ_c est partout régulière.
2) Déterminer la droite tangente de Γ_1 au point $P = (1, 1)$.
3) Déterminer la courbure de Γ_1 au point P.

Problème 2. La *cycloïde* est la courbe paramétrée :

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (x = t - \sin t, y = 1 - \cos t). \end{array}$$

Soit D le domaine borné de $\mathbb{R}^2$ limité par l'arc de cycloïde $\gamma([0, 2\pi])$ et le segment $[0, 2\pi]$ de l'axe (Ox).

1) Calculer l'aire A de D en utilisant la formule de Green-Riemann.
2) Soit $\omega = (x - y)dx + (x + y)dy$. Calculer l'intégrale curviligne

$$I = \int_{\partial^+ D} \omega$$

3) Comparer A et I. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Problème 3. La *trompette de Gabriel*[1] est la surface paramétrée :

$$\begin{array}{rccl} F : &]0, \infty[\times[0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & (x = u \cos v, y = u \sin v, z = 1/u). \end{array}$$

1) Montrer que F est un paramétrage régulier.

2) Donner une base du plan tangent ainsi que l'expression d'une normale unitaire.

3) On note R_θ la rotation d'angle θ autour de l'axe (Oz). Montrer que $R_\theta(F(u, v)) = F(u, v + \theta)$ et en déduire que l'image de F est une surface de révolution.

4) Soit $X > 1$, on note S_X l'image de $[1, X] \times [0, 2\pi]$ par F et S l'image de $[1, \infty[\times[0, 2\pi]$. On note encore $A(X)$ l'aire de S_X. Montrer que

$$\lim_{X \longrightarrow \infty} A(X) = \infty.$$

[1] Gabriel : archange et trompettiste.

5) On appelle *rayon* de F la fonction $r :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ qui à tout $z \in]0, \infty[$ associe le rayon $r(z)$ du cercle intersection de l'image de F avec le plan horizontal d'altitude z.

a) Donner l'expression de la fonction r.

b) La formule donnant le volume contenu par S est :

$$Vol := \pi \int_1^{\infty} r(z)^2 dz.$$

Montrer que l'intégrale impropre converge et calculer sa valeur.

Commentaire. – Les questions 4 et 5 présentent un paradoxe célèbre de la trompette de Gabriel : il suffit d'une quantité finie de liquide pour « remplir » la surface mais si on veut la peindre, il faudra une quantité infinie de peinture.

Problème 4. Soit $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière paramétrée par l'abscisse curviligne. On considère l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} [0, L] \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (s, u) & \longmapsto & \gamma(s) + u\gamma'(s). \end{array}$$

1) Quels sont les points réguliers de f ?

2) Montrer qu'en un point régulier (s, u), une normale unitaire est donnée par la binormale de γ en s.

3) Montrer que $\Sigma = f([0, L] \times \mathbb{R})$ est une surface réglée puis que toute génératrice $u \longmapsto \gamma(s) + u\gamma'(s)$ est contenue dans un plan tangent à Σ (on prendra garde aux points non réguliers).

4) On suppose que l'image de γ est contenue dans une sphère S centrée en l'origine.

a) Montrer que les génératrices sont toutes tangentes à la sphère.

b) On suppose que $L = 2\pi$ et $\gamma(s) = (\cos s, \sin s, 0)$. Quel est l'image de f ?