Université Claude Bernard Lyon 1

M1 – Géométrie

Corrigé du contrôle continu 2 du lundi 22 octobre 2018

Les documents sont autorisés mais les calculettes et les téléphones portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Problème. – Le but de ce problème est d'étudier l'effet sur les courbes de l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (\rho, \theta) & \longmapsto & (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) \end{array}$$

Attention : contrairement aux coordonnées polaires usuelles, l'ensemble de départ étant $\mathbb{R}^2$, on permet à ρ d'être négatif.

Première partie : Étude d'exemples

1) Écrire l'équation cartésienne de l'image par Ψ des droites suivantes :
 i) $\rho = a$ avec $a \in \mathbb{R}$.
 ii) $\theta = a$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Rép.– i) Notons $(x(\theta), y(\theta)) = (a\cos\theta, a\sin\theta)$ les coordonnées du point $\Psi(a, \theta)$. On a :

$$x^2(\theta) + y^2(\theta) = a^2.$$

Par conséquent $\Psi(\{\rho = a\})$ est inclu dans le cercle de rayon $|a|$ et de centre l'origine. Réciproquement, si $P = (x, y)$ est un point de ce cercle et si θ est l'angle entre l'horizontale et le rayon $[OP]$ alors $(x, y) = (|a|\cos\theta, |a|\sin\theta)$. C'est donc que $P = \Psi(a, \theta)$ si $a > 0$ ou que $P = \Psi(a, \theta + \pi)$ si $a < 0$.
ii) Notons $(x(\rho), y(\rho)) = (\rho\cos a, \rho\sin a)$ les coordonnées du point $\Psi(\rho, a)$. On a

$$\sin a \; x(\rho) - \cos a \; y(\rho) = 0.$$

Par conséquent $\Psi(\{\theta = a\})$ est inclu dans la droite passant par l'origine et faisant un angle a avec l'horizontale. Réciproquement, si $P = (x, y)$ est un point de cette droite et si ρ est la distance entre P et l'origine, alors $(x, y) = \epsilon(\rho\cos a, \rho\sin a)$ avec $\epsilon = \pm 1$. C'est donc que

$P = \Psi(\rho, a)$ si $\epsilon = 1$ ou que $P = \Psi(-\rho, a)$ si $\epsilon = -1$.

2) Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère la courbe $\theta \mapsto \alpha(\theta) = \Psi(a\theta, \theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

i) Montrer que la courbe α est régulière.

ii) Montrer que la courbure k_{alg} en tout point $\theta \in \mathbb{R}$ vaut

$$k_{alg}(\theta) = \frac{2+\theta^2}{a(1+\theta^2)^{3/2}}.$$

iii) Déterminer sa dérivée k'_{alg}.

iv) En déduire que l'image de la droite $\rho = a\theta$ est composée de l'origine et de l'union de deux spirales.

Rép.– Pour les calculs, on peut évidemment directement appliquer les formules du cours relatives aux courbes en polaires ou passer en notation complexe.
i) On a $\alpha(\theta) = a(\theta\cos\theta, \theta\sin\theta)$ d'où

$$\alpha'(\theta) = a(\cos\theta - \theta\sin\theta, \sin\theta + \theta\cos\theta)$$

et $\|\alpha'(\theta)\|^2 = a^2(1+\theta^2) \geq a^2 > 0$ est régulière.
ii) On a

$$\alpha''(\theta) = a(-2\sin\theta - \theta\cos\theta, 2\cos\theta - \theta\sin\theta)$$

d'où

$$k_{alg}(\theta) = \frac{1}{a}\frac{(\cos\theta-\theta\sin\theta)(2\cos\theta-\theta\sin\theta)-(\sin\theta+\theta\cos\theta)(-2\sin\theta-\theta\cos\theta)}{(1+\theta^2)^{3/2}}$$

Notons A le numérateur. On a

$$\begin{aligned} A &= \left(2\cos^2\theta - 3\theta\sin\theta\cos\theta + \theta^2\sin^2\theta\right) + \left(2\sin^2\theta + 3\theta\sin\theta\cos\theta + \theta^2\cos^2\theta\right) \\ &= 2+\theta^2 \end{aligned}$$

Finalement

$$k_{alg}(\theta) = \frac{2+\theta^2}{a(1+\theta^2)^{3/2}}.$$

iii) On a

$$\begin{aligned} k'_{alg}(\theta) &= \frac{2\theta(1+\theta^2)^{3/2} - (2+\theta^2)(3\theta(1+\theta^2)^{1/2})}{a(1+\theta^2)^3} \\ &= \frac{2\theta(1+\theta^2) - 3\theta(2+\theta^2)}{a(1+\theta^2)^{5/2}} \\ &= -\frac{\theta(4+\theta^2)}{a(1+\theta^2)^{5/2}} \end{aligned}$$

iv) On a $k'_{alg}(\theta) = 0 \iff \theta = 0$ ainsi α restreinte à $\mathbb{R}_{>0}$ est une spirale. Il en est de même de sa restriction à $\mathbb{R}_{<0}$.

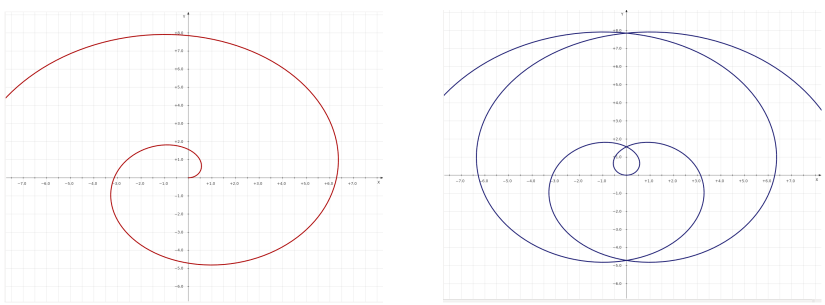
3) Le but de cette question est de dessiner le support de α pour $a = 1$. On distingue deux cas selon que $\theta \geq 0$ ou que $\theta < 0$.

i) Étudier α pour $\theta \in [0, +\infty[$ et tracer le support $\alpha([0, +\infty[)$.

ii) Soit R la réflexion par rapport à l'axe des ordonnées $R(x, y) = (-x, y)$. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a $\alpha(-\theta) = R(\alpha(\theta))$.

iii) Dessiner le support de α pour $\theta \in\,]-\infty, 0[$.

Rép.– i) et iii)



À gauche : le support $\alpha([0, +\infty[)$, à droite le support $\alpha(]-\infty, +\infty[)$

ii) On a

$$\alpha(-\theta) = (-\theta\cos(-\theta), -\theta\sin(-\theta)) = (-\theta\cos\theta, \theta\sin\theta) = R(\alpha(\theta)).$$

Deuxième partie : Effet de Ψ sur les courbes passant par l'origine

Soient I un intervalle ouvert contenant 0 et

$$\begin{array}{rccl} \delta : & I & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (\rho(t), \theta(t)) \end{array}$$

une courbe paramétrée birégulière de classe C^∞. On considère la courbe paramétrée $\gamma = \Psi \circ \delta : I \to \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, $t \mapsto \rho(t)e^{i\theta(t)}$.

4) Montrer que si γ ne passe pas par l'origine alors γ est régulière.

Rép.– Identifions $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$ et posons $\delta(t) = (\rho(t), \theta(t))$ ainsi $\gamma(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$. On a $\gamma' = (\rho' + i\theta'\rho)e^{i\theta}$ d'où

$$\gamma'(t) = 0 \iff \begin{cases} \rho'(r) & = & 0 \\ \theta'(t)\rho(t) & = & 0 \end{cases}$$

Comme γ ne passe pas par l'origine, on a $\rho(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. Par conséquent

$$\gamma'(t) = 0 \iff \begin{cases} \rho'(r) & = & 0 \\ \theta'(t) & = & 0 \end{cases} \iff \delta'(t) = 0.$$

Puisque δ est régulière, on en déduit qu'il en est de même pour γ.

5) On suppose maintenant que δ passe par l'origine au temps $t = 0$ tout en restant birégulière : $\delta(0) = (0, 0)$.

i) Montrer que γ est régulière en $t = 0$ si et seulement si la tangente à δ en $t = 0$ n'est pas verticale.

ii) Montrer que γ est birégulière en $t = 0$ (i.e. $\gamma'(0)$ et $\gamma''(0)$ sont linéairement indépendants) si et seulement si la tangente à δ en $t = 0$ n'est ni verticale, ni horizontale.

Rép.– i) D'après le calcul précédent et le fait que $\rho(0) = 0$, on a $\gamma'(0) = \rho'(0)e^{i\theta(0)}$. Le vecteur directeur de la tangente à δ en $t = 0$ est $\delta'(0) = (\rho'(0), \theta'(0)) \neq (0, 0)$. Puisque par hypothèse, cette tangente n'est pas verticale, c'est que $\rho'(0) \neq 0$. Ainsi $\gamma'(0) \neq 0$.
ii) On a

$$\begin{aligned} \gamma'' &= (\rho'' + i\theta''\rho + i\theta'\rho')e^{i\theta} + i\theta'(\rho' + i\theta'\rho)e^{i\theta} \\ &= \big((\rho'' - \theta'^2\rho) + i(\theta''\rho + 2\theta'\rho')\big)e^{i\theta} \end{aligned}$$

Puisque $\rho(0) = 0$,

$$\gamma''(0) = (\rho''(0) + 2i\theta'(0)\rho'(0))e^{i\theta(0)}$$

Ainsi $\gamma'(0)$ et $\gamma''(0)$ sont linéairement indépendants si et seulement si $\rho'(0)\theta'(0) \neq 0$. Puisque $\gamma'(0) = \rho'(0)e^{i\theta(0)}$, on en déduit :

$$\gamma \text{ birégulière en } t = 0 \iff \rho'(0) \neq 0 \text{ et } \theta'(0) \neq 0.$$

Or, l'hypothèse sur la tangente de δ signifie précisément que $\rho'(0) \neq 0$ et $\theta'(0) \neq 0$.

6) On suppose maintenant que δ est birégulière, passe par l'origine au temps $t = 0$ et que sa tangente en ce point est verticale. En particulier, γ n'est pas régulière au temps $t = 0$.

i) Montrer que $\gamma''(0) = \rho''(0)e^{i\theta(0)}$ avec $\rho''(0) \neq 0$.

ii) On admet que

$$\gamma'''(0) = (\rho'''(0) + 3i\theta'(0)\rho''(0))e^{i\theta(0)}.$$

Montrer que γ admet un point de rebroussement de première espèce en $t=0$.

Rép.– i) D'après les calculs effectués précédemment on a

$$\gamma''(0) = \rho''(0) + 2i\theta'(0)\rho'(0))e^{i\theta(0)} = \rho''(0)e^{i\theta(0)}$$

car l'hypothèse sur la tangente de δ implique $\rho'(0)=0$. Concernant δ, on a

$$\delta'(0) = (0, \theta'(0)) \quad \text{et} \quad \delta''(0) = (\rho''(0), \theta''(0)).$$

Puisque δ est birégulière, on a nécessairement $\theta'(0) \neq 0$ et $\rho''(0) \neq 0$.
ii) On a

$$\begin{array}{rcl} \gamma''' & = & \big((\rho''' - 2\theta'\theta''\rho - \theta'^2\rho') + i(\theta'''\rho + \theta''\rho' + 2\theta''\rho' + 2\theta'\rho'')\big)e^{i\theta} \\ & & +i\theta'\big((\rho'' - \theta'^2\rho) + i(\theta''\rho + 2\theta'\rho')\big)e^{i\theta} \end{array}.$$

De $\rho(0) = \rho'(0) = 0$, il découle que

$$\gamma'''(0) = (\rho'''(0) + 3i\theta'(0)\rho''(0))e^{i\theta(0)}$$

(ce calcul n'est pas demandé, il figure dans cette correction à titre informatif). Puisque $\theta'(0) \neq 0$ et $\rho''(0) \neq 0$, on en déduit que $\gamma''(0)$ et $\gamma'''(0)$ sont linéairement indépendants. D'après le cours, cela signifie que $t=0$ est un point de rebroussement de première espèce.

Troisième partie : Effet désingularisant de Ψ^{-1}

Soient p et q deux entiers tels que $0 < p < q$ avec p pair et q impair. On note $C_{p,q}(I)$ l'ensemble des courbes paramétrées $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$ de classe C^∞ telles que :

a) $\gamma(0) = (0,0)$,

b) pour tout $t \in I$, $x(t) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $t = 0$,

c) $x^{(k)}(0) = 0$ pour tout $0 \leq k < p$, $y^{(k)}(0) = 0$ pour tout $0 \leq k < q$ et $x^{(p)}(0) \neq 0$ et $y^{(q)}(0) \neq 0$.

Ces conditions impliquent que la courbe γ admet en $t=0$ un point de rebroussement de première espèce si q est impaire et de seconde espèce sinon.

7) Montrer que $t \mapsto (t^p, t^q)$ est dans $C_{p,q}(\mathbb{R})$. Dessiner le support de cette courbe pour $(p,q) = (2,3)$.

Rép.– Les vérifications sont immédiates. La courbe correspondant à $(p,q) = (2,3)$ dessine un point de rebroussement de première espèce.

8) Soit $\gamma \in C_{p,q}(I)$. Montrer que :

i) $\lim_{t\to 0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$.

ii) $\arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) = \frac{p!\, y^{(q)}(0)}{q!\, x^{(q)}(0)} t^{q-p} + o(t^{q-p})$ (on rappelle que $\arctan x = x + o(x)$).

iii) $\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \frac{x^{(p)}(0)}{p!} t^p + o(t^p)$ (on rappelle que $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$).

Rép.– i) On a

$$x(t) = \frac{x^{(p)}(0)}{p!} t^p + o(t^p) \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{y^{(q)}(0)}{q!} t^q + o(t^q)$$

d'où

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{p!\, y^{(q)}(0)}{q!\, x^{(p)}(0)} t^{q-p} + o(t^{q-p})$$

et $\lim_{t\to 0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$.

ii) Puis

$$\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = x(t)\sqrt{1 + \left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)^2} = \left(\frac{x^{(p)}(0)}{p!} t^p + o(t^p)\right)\sqrt{1 + o(t^{2(q-p-1)})}$$

Par conséquent

$$\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \frac{x^{(p)}(0)}{p!} t^p + o(t^p).$$

iii) Enfin, de $\arctan x = x + o(x)$, on déduit

$$\arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) = \frac{p!\, y^{(q)}(0)}{q!\, x^{(p)}(0)} t^{q-p} + o(t^{q-p}).$$

Pour tout $\gamma \in C_{p,q}(I)$, on définit

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{\gamma} : & I & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & (\widetilde{x}(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}, \widetilde{y}(t) = \arctan \frac{y(t)}{x(t)}) \end{array}$$

On convient que, en $t = 0$, l'écriture $\arctan \frac{y(0)}{x(0)}$ signifie 0 et on admet que $\widetilde{\gamma}$ est C^∞.

9) Soit $\gamma \in C_{p,q}(I)$. Montrer que $\Psi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$.

Rép.– Si $t = 0$ alors $(\Psi \circ \widetilde{\gamma})(0) = (0, 0) = \gamma(0)$. Supposons $t \neq 0$. Par définition de Ψ on a

$$(\Psi \circ \widetilde{\gamma})(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}e^{i \arctan \frac{y(t)}{x(t)}}$$

ce qui est l'écriture en polaire de γ.

10) Soit $\gamma \in C_{p,q}(I)$ (avec toujours p pair).

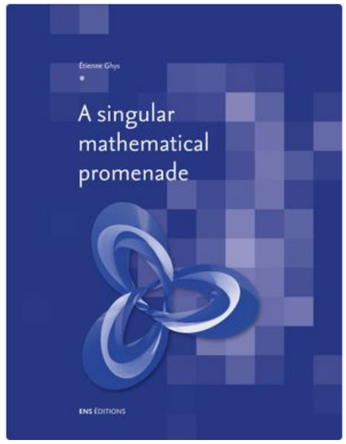
i) Montrer que si $q - p > p$ alors $\widetilde{\gamma} \in C_{p,q-p}(I)$. La nature du point de rebroussement en $t = 0$ est-elle conservée ?

ii) Montrer que si $q - p < p$ alors $\widetilde{\gamma}$ présente en $t = 0$ un point ordinaire (on dit alors que l'on a « résolu » le point singulier).

iii) Montrer qu'en itérant un nombre fini de fois l'application $\gamma \mapsto \widetilde{\gamma}$, on obtient une courbe qui présente en $t = 0$ un point ordinaire.

Rép.– i) Il découle directement de la définition de $\widetilde{\gamma}$ que $\widetilde{\gamma}(0) = (0, 0)$ et que $\widetilde{x}(t) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $t = 0$. Si $q - p > p$, les résultats de la question 6 montrent que les points b et c de la définition sont satisfaits pour la paire d'entiers $(p, q-p)$. Puisque l'entier p est pair, $q - p$ et q sont de même parité et la nature du point de rebroussement reste inchangée.
ii) Si $q - p < p$ alors la $(q - p)$-ème dérivée de $\widetilde{\gamma}^{(q-p)}(0)$ devient la première dérivée non nulle. Son ordre est impair. La dérivée $\widetilde{\gamma}^{(p)}(0)$ devient la première dérivée d'ordre supérieur à $q-p$ linéairement indépendante de $\widetilde{\gamma}^{(q-p)}(0)$. Son ordre est pair. Le point $t = 0$ est donc un point ordinaire.
iii) Écrivons la division euclidienne de q par p : on a $q = mp+r$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq r \leq p-1$ (r ne peut pas valoir zéro car q et p n'ont pas la même parité). Notons γ_1 pour $\widetilde{\gamma}$, γ_2 pour $\widetilde{\gamma_1} = \widetilde{\widetilde{\gamma}}$, etc... D'après la question précédente, la courbe γ_m présente en $t = 0$ un point ordinaire.

Note culturelle.– Le procédé esquissé ici est à l'origine d'une méthode de désingularisation très utilisée en géométrie algébrique : l'éclatement. Je vous recommande, une fois remis de cette épreuve, d'en apprendre plus en jetant un oeil au livre d'Étienne Ghys, *A singular mathemacal promenade*, p. 111 et suivantes (pdf disponible gratuitement sur la page de l'auteur). C'est accessible, passionnant et truffé de belles illustrations.


Étienne Ghys
A singular
mathematical
promenade
ENS ÉDITIONS