Université Claude Bernard Lyon 1

M1 – Géométrie

Contrôle continu 2 du 4 novembre 2019

Les documents sont autorisés mais les calculettes et les téléphones portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Problème. – Le but de ce problème est de démontrer un résultat de Jean-Baptiste Meunier (1754-1793) qui énonce que les cercles osculateurs des courbes obtenues par intersection d'une surface avec une famille de plans obliques sont inclus dans une même sphère.

Première partie : cercle osculateur à un sommet d'une ellipse

Soit $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$. On note (X, Y) les coordonnées d'un point dans $\mathbb{R}^2$ et on considère l'ellipse E_θ d'équation

$$(\cos\theta X - 1)^2 + Y^2 = 1$$

ainsi qu'une paramétrisation $\gamma_\theta :]-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$ de celle-ci donnée par

$$X(t) = \frac{\cos t + 1}{\cos\theta} \quad \text{et} \quad Y(t) = \sin t.$$

1) Montrer que γ_θ est régulière.

2) Dessiner sommairement le support Γ de γ_θ. Montrer que l'origine O est dans Γ.

3) Calculer la courbure principale k_θ de γ_θ en tout temps t.

4) Montrer que le cercle osculateur de l'ellipse E_θ en l'origine O a pour équation cartésienne $(X - \cos\theta)^2 + Y^2 = \cos^2\theta$.

Deuxième partie : Étude d'un exemple

On note $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$ le repère canonique de $\mathbb{R}^3$ et (x, y, z) les coordonnées d'un point dans ce repère. On considère le cylindre $\mathcal{C}$ dont une équation dans ce repère est donnée par $y^2 + (z-1)^2 = 1$ et pour tout $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$, on pose

$$e_\theta = \cos\theta\, e_3 + \sin\theta\, e_1 \quad \text{et} \quad \nu_\theta = -\sin\theta\, e_3 + \cos\theta\, e_1.$$

Soit P_θ le plan passant par O et engendré par e_2 et e_θ. Un vecteur normal de ce plan est donc ν_θ.

5) Faire un dessin sommaire montrant le cylindre $\mathcal{C}$ et un des plan P_θ pour $\theta \in]0, \pi/2[$.

6) On considère le repère $\mathcal{R}_\theta = (O, e_\theta, e_2, \nu_\theta)$ et on note (X, Y, Z) les coordonnées dans ce repère.

a) Exprimer les coordonnées (x, y, z) dans le repère $\mathcal{R}$ en fonction de (X, Y, Z).

b) Donner une équation cartésienne de P_θ dans $\mathcal{R}_\theta$.

c) Montrer qu'une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}_\theta$ est

$$Y^2 + (\cos\theta\, X - \sin\theta\, Z - 1)^2 = 1.$$

d) En déduire que $\mathcal{C} \cap P_\theta$ est l'ellipse déterminée par les équations

$$(\cos\theta\, X - 1)^2 + Y^2 = 1 \quad \text{et} \quad Z = 0.$$

7) On note C_θ le cercle osculateur de $\mathcal{C} \cap P_\theta$ en l'origine O.

a) Avec l'aide des résultats obtenus dans la première partie donner les deux équations cartésiennes qui définissent C_θ dans le repère $\mathcal{R}_\theta$.

b) Montrer que la sphère $\mathcal{S}$ de rayon 1 et de centre le point $O + e_3$ a pour équation

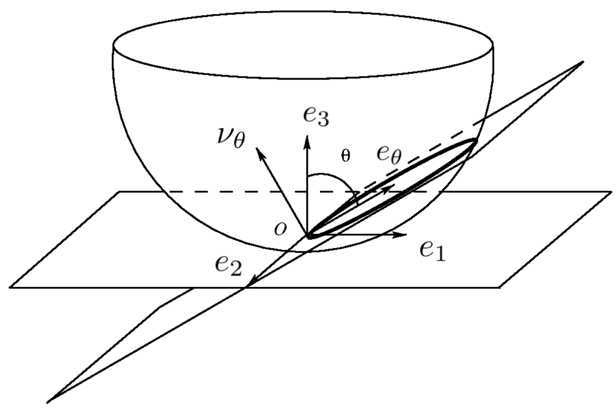
$$(X - \cos\theta)^2 + Y^2 + (Z + \sin\theta)^2 = 1$$

dans le repère $\mathcal{R}_\theta$.

c) Montrer que pour tout $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$, le cercle osculateur est inclus dans $\mathcal{S}$.

Troisième partie : Le cas général

On reprend les mêmes notations qu'à la seconde partie et on remplace le cylindre $\mathcal{C}$ par une surface quelconque Σ. On suppose que $O \in \Sigma$ et que e_3 est une normale à Σ en O. On suppose en outre que, pour tout $\theta \in]-\pi/2; \pi/2[$, l'intersection $\Sigma \cap P_\theta$ est le support d'une courbe birégulière paramétrée par la longueur d'arc $\gamma_\theta : I_\theta \to \Sigma \cap P_\theta$ telle que $0 \in I_\theta$, $\gamma_\theta(0) = O$ et $\gamma'_\theta(0) = e_2$. On note k_θ (resp. N_θ) la courbure principale (resp. la normale principale) de γ_θ.



8) Soient $V \subset \mathbb{R}^3$ un voisinage de O et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application telle que $g(O) = e_3$ et telle que pour tout $p \in \Sigma \cap V$, $g(p)$ est une normale unitaire de Σ en p.

a) Montrer que $(g \circ \gamma_\theta)'(0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$. En déduire que $\langle (g \circ \gamma_\theta)'(0), \gamma'_\theta(0) \rangle$ est indépendant de θ.

b) Montrer que $N_\theta(0) = \pm e_\theta$. On suppose pour la suite que $N_\theta(0) = e_\theta$.

c) Montrer que $\langle g \circ \gamma_\theta(0), \gamma''_\theta(0) \rangle$ est indépendant de θ.

d) En déduire que $k_0(0) = k_\theta(0) \cos\theta$.

9) Soit $\Omega_\theta = O + k_\theta^{-1}(0) N_\theta(0)$ le centre de courbure de γ_θ en O et soit

$$\delta_\theta(t) = \Omega_\theta - k_\theta^{-1}(0)(\cos t\, e_\theta + \sin t\, e_2)$$

une paramétrisation du cercle osculateur de γ_θ en O.

a) Montrer que pour tout t on a :

$$\delta_\theta(t) = k_0^{-1}(0)(\cos\theta \sin\theta (1 - \cos t) e_1 + \cos\theta \sin t\, e_2 + \cos^2\theta\, (1 - \cos t) e_3)$$

b) Montrer que le support de δ_θ est inclus dans une sphère de centre $O + k_0^{-1}(0) e_3$ et de rayon $k_0^{-1}(0)$.