Université Claude Bernard Lyon 1

M1 – Géométrie

Corrigé du contrôle continu 2 du 4 novembre 2019

Les documents sont autorisés mais les calculettes et les téléphones portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Problème. – Le but de ce problème est de démontrer un résultat de Jean-Baptiste Meunier (1754-1793) qui énonce que les cercles osculateurs des courbes obtenues par intersection d'une surface avec une famille de plans obliques sont inclus dans une même sphère.

Première partie : cercle osculateur à un sommet d'une ellipse

Soit $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$. On note (X, Y) les coordonnées d'un point dans $\mathbb{R}^2$ et on considère l'ellipse E_θ d'équation

$$(\cos\theta X - 1)^2 + Y^2 = 1$$

ainsi qu'une paramétrisation $\gamma_\theta :]-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$ de celle-ci donnée par

$$X(t) = \frac{\cos t + 1}{\cos\theta} \quad \text{et} \quad Y(t) = \sin t.$$

1) Montrer que γ_θ est régulière.

Rép.– On a

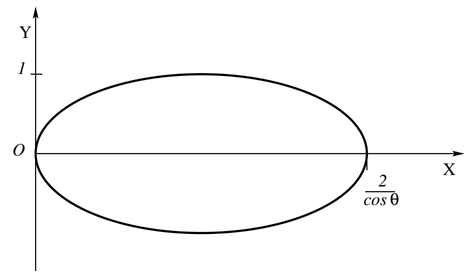
$$X'(t) = -\frac{\sin t}{\cos\theta} \quad \text{et} \quad Y(t) = \cos t$$

d'où

$$X'^2(t) + Y'^2(t) = \cos^2 t + \frac{\sin^2 t}{\cos^2\theta} = 1 + \sin^2 t\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right) = 1 + \tan^2\theta \sin^2 t > 1.$$

2) Dessiner sommairement le support Γ de γ_θ. Montrer que l'origine O est dans Γ.

Rép.– On constate que $\gamma_\theta(\pi) = (0, 0)$.



3) Calculer la courbure principale k_θ de γ_θ en tout temps t.

Rép.– On a

$$X'(t)Y''(t) - Y'(y)X''(t) = \frac{\sin^2 t}{\cos\theta} + \frac{\cos^2 t}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta}.$$

Notons que $\cos\theta \geq 0$ pour $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$ ainsi

$$k_\theta(t) = \frac{1}{\cos\theta}\left(1 + \tan^2\theta \sin^2 t\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

4) Montrer que le cercle osculateur de l'ellipse E_θ en l'origine O a pour équation cartésienne $(X - \cos\theta)^2 + Y^2 = \cos^2\theta$.

Rép.– Le rayon de ce cercle est donnée par $k_\theta^{-1}(\pi) = \cos\theta$. La normale principale de γ_θ en $t = \pi$ est donnée par

$$N_\gamma(\pi) = \frac{\gamma''_\theta(\pi)}{\|\gamma''_\theta(\pi)\|} = (1, 0)$$

ainsi le centre de courbure Ω_θ en $t = \pi$ est

$$\Omega_\theta(\pi) = \gamma_\theta(\pi) + \frac{1}{k_\theta(\pi)} N_\gamma(\pi) = O + \cos\theta\,(1, 0) = (\cos\theta, 0).$$

Le cercle osculateur de E_θ en O a donc pour équation cartésienne

$$(X - \cos\theta)^2 + Y^2 = \cos^2\theta.$$

Deuxième partie : Étude d'un exemple

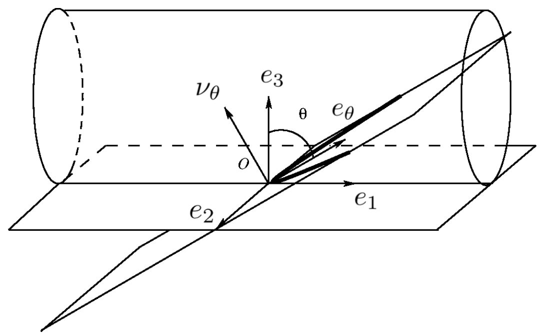
On note $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$ le repère canonique de $\mathbb{R}^3$ et (x, y, z) les coordonnées d'un point dans ce repère. On considère le cylindre $\mathcal{C}$ dont une équation dans ce repère est donnée par $y^2 + (z-1)^2 = 1$ et pour tout $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$, on pose

$$e_\theta = \cos\theta\, e_3 + \sin\theta\, e_1 \quad \text{et} \quad \nu_\theta = -\sin\theta\, e_3 + \cos\theta\, e_1.$$

Soit P_θ le plan passant par O et engendré par e_2 et e_θ. Un vecteur normal de ce plan est donc ν_θ.

5) Faire un dessin sommaire montrant le cylindre $\mathcal{C}$ et un des plan P_θ pour $\theta \in]0, \pi/2[$.

Rép.–



6) On considère le repère $\mathcal{R}_\theta = (O, e_\theta, e_2, \nu_\theta)$ et on note (X, Y, Z) les coordonnées dans ce repère.

a) Exprimer les coordonnées (x, y, z) dans le repère $\mathcal{R}$ en fonction de (X, Y, Z).

b) Donner une équation cartésienne de P_θ dans $\mathcal{R}_\theta$.

c) Montrer qu'une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}_\theta$ est

$$Y^2 + (\cos\theta\, X - \sin\theta\, Z - 1)^2 = 1.$$

d) En déduire que $\mathcal{C} \cap P_\theta$ est l'ellipse déterminée par les équations

$$(\cos\theta\, X - 1)^2 + Y^2 = 1 \quad \text{et} \quad Z = 0.$$

Rép.– a) Constatons d'abord que

$$e_3 = \cos\theta\, e_\theta - \sin\theta\, \nu_\theta \quad \text{et} \quad e_1 = \sin\theta\, e_\theta + \cos\theta\, \nu_\theta.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} xe_1 + ye_2 + ze_3 &= x(\sin\theta\, e_\theta + \cos\theta\, \nu_\theta) + ye_2 + z(\cos\theta\, e_\theta - \sin\theta\, \nu_\theta) \\ &= (\sin\theta\, x + \cos\theta\, z)e_\theta + ye_2 + (\cos\theta\, x - \sin\theta\, z)\nu_\theta \end{aligned}$$

Ainsi

$$X = \sin\theta\, x + \cos\theta\, z, \quad Y = y \quad \text{et} \quad Z = \cos\theta\, x - \sin\theta\, z.$$

b) Puisque $P_\theta = O + Vect(e_\theta, e_2)$, on a $(X,Y,Z) \in P_\theta \iff Z = 0$.
c) Des relations du a), on déduit

$$x = \sin\theta\, X + \cos\theta\, Z,\ \ y = Y \quad \text{et} \quad z = \cos\theta\, X - \sin\theta\, Z.$$

Ainsi

$$y^2 + (z-1)^2 = 1 \iff Y^2 + (\cos\theta\, X - \sin\theta\, Z - 1)^2 = 1.$$

d) On a

$$(x,y,z) \in \mathcal{C} \cap P_\theta \iff \left\{ \begin{array}{rcl} Y^2 + (\cos\theta\, X - \sin\theta\, Z - 1)^2 & = & 1 \\ Z & = & 0 \end{array} \right.$$

c'est-à-dire

$$(x,y,z) \in \mathcal{C} \cap P_\theta \iff Y^2 + (\cos\theta\, X - 1)^2 = 1 \quad \text{et} \quad Z = 0.$$

7) On note C_θ le cercle osculateur de $\mathcal{C} \cap P_\theta$ en l'origine O.

a) Avec l'aide des résultats obtenus dans la première partie donner les deux équations cartésiennes qui définissent C_θ dans le repère $\mathcal{R}_\theta$.

b) Montrer que la sphère $\mathcal{S}$ de rayon 1 et de centre le point $O + e_3$ a pour équation

$$(X - \cos\theta)^2 + Y^2 + (Z + \sin\theta)^2 = 1$$

dans le repère $\mathcal{R}_\theta$.

c) Montrer que pour tout $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$, le cercle osculateur est inclus dans $\mathcal{S}$.

Rép.– a) Les résultats obtenus en première partie donnent immédiatement les équations cartésiennes de C_θ dans le repère $\mathcal{R}_\theta$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (X - \cos\theta)^2 + Y^2 & = & \cos^2\theta \\ Z & = & 0 \end{array} \right.$$

b) Dans ce repère $\mathcal{R}$, la sphère de rayon 1 et de centre le point $O + e_3$ a pour équation

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1.$$

Il suffit de remplacer avec les expressions obtenues en 6c)

$$x = \sin\theta\, X + \cos\theta\, Z,\ \ y = Y \quad \text{et} \quad z = \cos\theta\, X - \sin\theta\, Z.$$

pour obtenir l'équation cartésienne de $\mathcal{S}$ dans le repère $\mathcal{R}_\theta$.
c) Soit $(X,Y,Z) \in C_\theta$ alors

$$(X - \cos\theta)^2 + Y^2 + (Z + \sin\theta)^2 = \cos^2\theta + (0 + \sin\theta)^2$$

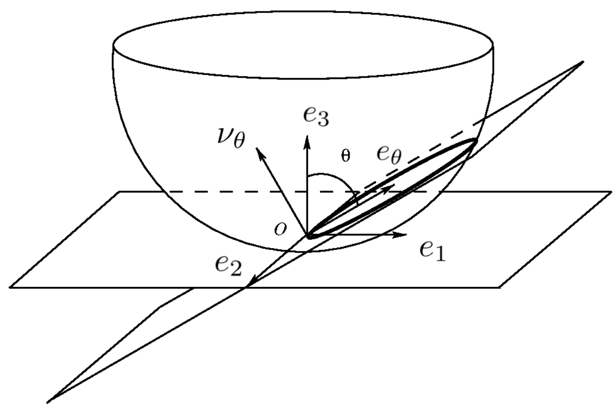
d'après 7a). Ainsi

$$(X-\cos\theta)^2+Y^2+(Z+\sin\theta)^2=1$$

et donc $C_\theta \subset \mathcal{S}$.

Troisième partie : Le cas général

On reprend les mêmes notations qu'à la seconde partie et on remplace le cylindre $\mathcal{C}$ par une surface quelconque Σ. On suppose que $O \in \Sigma$ et que e_3 est une normale à Σ en O. On suppose en outre que, pour tout $\theta \in]-\pi/2;\pi/2[$, l'intersection $\Sigma \cap P_\theta$ est le support d'une courbe birégulière paramétrée par la longueur d'arc $\gamma_\theta : I_\theta \to \Sigma \cap P_\theta$ telle que $0 \in I_\theta$, $\gamma_\theta(0) = O$ et $\gamma'_\theta(0) = e_2$. On note k_θ (resp. N_θ) la courbure principale (resp. la normale principale) de γ_θ.



8) Soient $V \subset \mathbb{R}^3$ un voisinage de O et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application telle que

i) $g(O) = e_3$

ii) Pour tout $p \in \Sigma \cap V$, $g(p)$ est une normale unitaire de Σ en p.

a) Montrer que $(g\circ\gamma_\theta)'(0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$. En déduire que $\langle (g\circ\gamma_\theta)'(0), \gamma'_\theta(0)\rangle$ est indépendant de θ.

b) Montrer que $N_\theta(0) = \pm e_\theta$. On suppose pour la suite que $N_\theta(0) = e_\theta$.

c) Montrer que $\langle g\circ\gamma_\theta(0), \gamma''_\theta(0)\rangle$ est indépendant de θ.

d) En déduire que $k_0(0) = k_\theta(0)\cos\theta$.

Rép.– a) Puisque $\gamma'_\theta(0) = e_2$, on a $(g\circ\gamma_\theta)'(0) = dg_{\gamma_\theta(0)}(e_2) = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$ et donc

$$\langle (g\circ\gamma_\theta)'(0), \gamma'_\theta(0)\rangle = \langle \frac{\partial g}{\partial y}(0,0), e_2\rangle$$

est indépendant de θ.
b) L'image de la courbe γ_θ est contenue dans le plan $P_\theta = O + Vect(e_2, e_\theta)$. Puisque $\gamma'_\theta(0) = e_2$ et que γ_θ est birégulière, on doit avoir $N_\theta(0) = \pm e_\theta$.
c) Pour tout t suffisamment petit (pour que $\gamma_\theta(t) \in V$) on a :

$$\langle g \circ \gamma_\theta(t), \gamma'_\theta(t) \rangle = 0$$

Donc

$$\langle (g \circ \gamma_\theta)'(t), \gamma'_\theta(t) \rangle = -\langle g \circ \gamma_\theta(t), \gamma''_\theta(t) \rangle$$

d'où

$$\langle (g \circ \gamma_\theta)(0), \gamma''_\theta(0) \rangle = -\langle \frac{\partial g}{\partial y}(0,0), e_2 \rangle$$

est indépendant de θ.
d) En particulier

$$\langle (g \circ \gamma_0)(0), \gamma''_0(0) \rangle = \langle (g \circ \gamma_\theta)(0), \gamma''_\theta(0) \rangle$$

donne

$$\langle e_3, \gamma''_0(0) \rangle = \langle e_3, \gamma''_\theta(0) \rangle.$$

Or $\gamma''_0(0) = k_0(0)e_3$ et $\gamma''_\theta(0) = k_\theta(0)e_\theta$. Puisque $\langle e_3, e_\theta \rangle = \cos\theta$, on en déduit $k_0(0) = k_\theta(0)\cos\theta$.

9) Soit $\Omega_\theta = O + k_\theta^{-1}(0)N_\theta(0)$ le centre de courbure de γ_θ en O et soit

$$\delta_\theta(t) = \Omega_\theta - k_\theta^{-1}(0)(\cos t\, e_\theta + \sin t\, e_2)$$

une paramétrisation du cercle osculateur de γ_θ en O.

a) Montrer que pour tout t on a :

$$\delta_\theta(t) = k_0^{-1}(0)(\cos\theta \sin\theta(1-\cos t)e_1 + \cos\theta \sin t\, e_2 + \cos^2\theta\,(1-\cos t)e_3)$$

b) Montrer que le support de δ_θ est inclus dans une sphère de centre $O + k_0^{-1}(0)e_3$ et de rayon $k_0^{-1}(0)$.

Rép.– Le centre de courbure Ω_θ de γ_θ en O est

$$\Omega_\theta = O + k_\theta^{-1}(0)N_\theta(0) = k_\theta^{-1}(0)(\cos\theta\, e_3 + \sin\theta\, e_1)$$

D'où une paramétrisation du cercle osculateur de γ_θ en O

$$\begin{aligned}
\delta_\theta(t) &= \Omega_\theta - k_\theta^{-1}(0)(\cos t\, e_\theta + \sin t\, e_2) \\
&= k_\theta^{-1}(0)(\cos\theta\, e_3 + \sin\theta\, e_1) - k_\theta^{-1}(0)(\cos t\, e_\theta + \sin t\, e_2) \\
&= k_\theta^{-1}(0)(\cos\theta\, e_3 + \sin\theta\, e_1 - \cos t(\cos\theta\, e_3 + \sin\theta\, e_1) - \sin t\, e_2) \\
&= k_\theta^{-1}(0)(\sin\theta(1-\cos t)e_1 + \sin t\, e_2 + \cos\theta\,(1-\cos t)e_3)
\end{aligned}$$

Puisque $k_\theta(0)\cos\theta = k_0(0)$ on a

$$\delta_\theta(t) \quad = \quad k_0^{-1}(0)(\cos\theta\sin\theta(1-\cos t)e_1 + \cos\theta\sin t\, e_2 + \cos^2\theta\,(1-\cos t)e_3)$$

Posons $\delta_\theta(t) = (x(t), y(t), z(t))$, on a $z(t) - k_0^{-1}(0) = -k_0^{-1}(0)(\sin^2\theta + \cos^2\theta\cos t)$ d'où

$$(z(t) - k_0^{-1}(0))^2 = k_0^{-2}(0)(\sin^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta\cos t + \cos^4\theta\cos^2 t).$$

On a aussi

$$x^2(t) + y^2(t) \quad = \quad k_0^{-2}(0)(\cos^2\theta\sin^2\theta - 2\cos^2\theta\sin^2\theta\cos t + \cos^2\theta\sin^2\theta\cos^2 t + \cos^2\theta\sin^2 t)$$

D'où en sommant

$$\begin{aligned} x^2(t) + y^2(t) + (z(t) - k_0^{-1}(0))^2 &= k_0^{-2}(0)\big(\sin^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\ &\quad + \cos^2\theta\cos^2 t(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \cos^2\theta\sin^2 t\big) \\ &= k_0^{-2}(0)\big(\sin^2\theta + \cos^2\theta\cos^2 t + \cos^2\theta\sin^2 t\big) \\ &= k_0^{-2}(0) \end{aligned}$$

Ainsi, l'image le support du cercle osculateur à γ_θ en 0 est inclus dans la sphère

$$x^2 + y^2 + (z - k_0^{-1}(0))^2 = k_0^{-2}(0).$$