Université Claude Bernard Lyon 1

M1 – Géométrie

Contrôle continu 2 du 12 octobre 2021 - Durée 2h

Les documents sont autorisés mais les calculettes et les téléphones portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Problème. – Dans ce problème on note (e_1, e_2, e_3) la base standard de $\mathbb{R}^3$ et (x, y, z) les coordonnées des points dans cette base.

Ce problème est composé de trois parties relativement indépendantes.

Pour vos calculs, un formulaire de trigonométrie est à votre disposition en fin de sujet.

Première partie : Courbes holonomes

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞. On note $j^n f : [a, b] \to \mathbb{R}^{n+1}$ la courbe paramétrée

$$t \longmapsto (f(t), f'(t), f''(t), ..., f^{(n)}(t)).$$

Une telle courbe est appelée COURBE HOLONOME D'ORDRE n.

1) Montrer que le cercle $C(O, R)$ de centre l'origine et de rayon R est une courbe holonome d'ordre 1, c'est-à-dire qu'il existe f tel que $j^1 f$ soit une paramétrisation de $C(O, R)$.

2) On considère la courbe $j^2 f$ où $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ est la fonction sinus.

a) Montrer que le support de $j^2 f$ est inclus dans le plan affine d'équation $x + z = 0$.

b) Montrer que $\left(\frac{e_1 - e_3}{\sqrt{2}}, e_2\right)$ est une base orthonormée de ce plan.

c) Écrire $j^2 f(t)$ dans cette base et en déduire que le support de $j^2 f$ est une ellipse dont on déterminera une équation cartésienne.

3) On rappelle qu'une courbe de $\mathbb{R}^3$ est dite PLANAIRE si son support est inclus dans un plan. Montrer que $j^2 f$ est une courbe planaire si et seulement si f est solution d'une équation différentielle d'ordre au plus deux et à coefficients constants.

4) On suppose que $j^1 f$ est une courbe régulière.

a) Montrer qu'un point où $j^1 f$ coupe l'axe (Ox) la tangente est verticale.

b) Montrer que si $j^2 f$ est une courbe sans point double alors les points doubles de $j^1 f$ sont *transverses* i.e. les deux tangentes en chaque point double ne sont pas confondues.

c) Montrer que si $j^2 f$ est une courbe sans point double alors l'axe (Ox) ne contient aucun point double de $j^1 f$.

5) On considère la forme différentielle $\alpha = y dx$.

a) Montrer que

$$\int_{j^1 f} \alpha > 0$$

pour tout $f \in C^\infty([a, b])$ non constante.

b) Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $\phi : [c, d] \to [a, b]$ un reparamétrage. Montrer que

$$\int_\gamma \alpha = \epsilon \int_{\gamma \circ \phi} \alpha$$

où $\epsilon = \pm 1$ selon que ϕ est croissante ou décroissante.

c) En déduire que la courbe paramétrée $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$t \longmapsto (\sin t, \sin 2t)$$

n'admet pas de reparamérage ϕ tel que $\gamma \circ \phi$ soit une courbe holomone d'ordre 1.

Deuxième partie : Forme de contact et courbes legendriennes

La 1-forme différentielle $\xi = dz - y dx$ est appelé la FORME DE CONTACT STANDARD de $\mathbb{R}^3$. On dit qu'une courbe $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ est LEGENDRIENNE si pour tout $t \in [a, b]$ on a

$$\xi_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = 0.$$

6) a) Montrer qu'en tout point (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ le noyau de ξ est un plan $P(x, y, z)$ dont on déterminera un vecteur normal.

b) Montrer que si γ est une courbe legendrienne régulière alors son vecteur tangent n'est jamais vertical i. e.

$$\forall t \in [a, b], \quad \gamma'(t) \notin Vect(e_3).$$

c) Soit $proj : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la projection $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Montrer que si γ est une courbe legendrienne régulière alors $proj \circ \gamma$ est une courbe plane régulière.

d) On suppose que γ est une courbe legendrienne régulière fermée. Déterminer

$$\int_{proj \circ \gamma} \alpha.$$

Soit γ est une courbe legendrienne régulière et fermée. On définit le NOMBRE DE ROTATION $rot(\gamma)$ de γ comme étant le nombre de rotation de sa projection $proj \circ \gamma$ sur le plan (Oxy).

7) On considère $\gamma' : [a, b] \to \mathbb{R}^3 \setminus (Oz)$ l'indicatrice d'une courbe legendrienne régulière fermée et écrite en coordonnées sphériques :

$$x'(t) = r(t) \sin\theta(t) \cos\varphi(t), y'(t) = r(t) \sin\theta(t) \sin\varphi(t), z'(t) = \cos\theta(t)$$

avec $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $\theta : [a, b] \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Montrer que

$$rot(\gamma) = \frac{1}{2\pi}(\varphi(b) - \varphi(a)).$$

TROISIÈME PARTIE : COUSIN LEGENDRIEN D'UNE COURBE HOLONOME

Soit $j^2 f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ une courbe holonome d'ordre 2. Son COUSIN LEGENDRIEN est la courbe paramétrée $\ell : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$t \longmapsto (f(t), 3f'(t)f''(t), f'(t)^3).$$

8) a) Montrer que ℓ est régulière si et seulement si $j^1 f$ est régulière.

b) Montrer que le cousin legendrien ℓ est une courbe legendrienne.

9) On suppose que $f : [-T/2, T/2] \to \mathbb{R}$ est une fonction impaire T-périodique $(T > 0)$. Montrer que le nombre de rotation du cousin legendrien ℓ est nul.

10) On considère la courbe $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\gamma(t) = (\sin t, -3 \sin t \cos t, \cos^3 t).$$

a) Montrer que γ est une courbe legendrienne régulière et fermée.
b) Déterminer son nombre de rotation.

11) On considère la légère variation de la courbe γ donnée par

$$\delta(t) = (1 + \sin t, -3 \sin t \cos t, \cos^3 t).$$

avec $t \in [-\pi, \pi]$.
a) Montrer que δ est une courbe legendrienne régulière et fermée.
b) Déterminer son nombre de rotation.

Note culturelle. – Une courbe fermée simple legendrienne s'appelle un noeud legendrien. L'étude de tels noeuds est un domaine actif de la recherche actuelle. Les cousins legendriens ont été introduits par les mathématiciennes Joan Birman et Nancy Wrinkle en 1999.

Formulaire trigonométrique.–

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta, \quad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\begin{aligned}
\cos p + \cos q &= 2 \cos \tfrac{p+q}{2} \cos \tfrac{p-q}{2} \\
\cos p - \cos q &= -2 \sin \tfrac{p+q}{2} \sin \tfrac{p-q}{2} \\
\sin p + \sin q &= 2 \sin \tfrac{p+q}{2} \cos \tfrac{p-q}{2} \\
\sin p - \sin q &= 2 \sin \tfrac{p-q}{2} \cos \tfrac{p+q}{2}.
\end{aligned}$$