Université Claude Bernard Lyon 1

M1G – Géométrie

Contrôle final - Mercredi 9 janvier 2019 - durée 2h

Les documents sont autorisés mais les calculettes et les portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Exercice. – [7 pts] Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une submersion de classe C^∞. On note $S = F^{-1}(0)$ et on suppose $S \neq \emptyset$.

1) L'ensemble S est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^3$? On justifiera la réponse.

2) Soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point de S. Montrer que si $\frac{\partial F}{\partial z}(M_0) \neq 0$ alors il existe un voisinage V_1 de (x_0, y_0), un voisinage V_2 de z_0 et une application $\varphi : V_1 \to V_2$ telle que

$$(x, y, z) \in (V_1 \times V_2) \cap S \iff (x, y) \in V_1 \text{ et } z = \varphi(x, y)$$

.

3) Montrer que φ est C^∞ sur V_1 et que pour tout $(x, y) \in V_1$ on a

$$d\varphi_{(x,y)} = -\frac{F_x(x, y, \varphi(x, y))}{F_z(x, y, \varphi(x, y))}dx - \frac{F_y(x, y, \varphi(x, y))}{F_z(x, y, \varphi(x, y))}dy$$

4) Soit $f : V_1 \to \mathbb{R}^3$ la paramétrisation d'un voisinage de M_0 dans S donnée par

$$f(x, y) = (x, y, \varphi(x, y))$$

Montrer que f est régulière.

5) Montrer qu'une équation cartésienne du plan tangent à S en M_0 est donnée par

$$F_x(M_0)(X - x_0) + F_y(M_0)(Y - y_0) + F_z(M_0)(Z - z_0) = 0.$$

Problème. – [13 pts] Soit $R > 0$. On considère la surface paramétrée donnée par

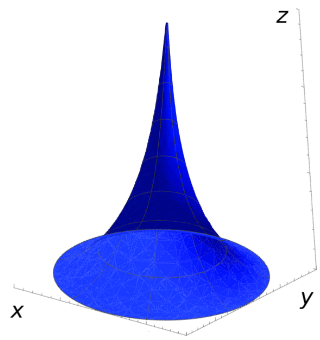
$$\begin{array}{rccc} f : &]0, +\infty[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & R\left(\dfrac{\cos v}{\mathrm{ch} u}, \dfrac{\sin v}{\mathrm{ch} u}, (u - \mathrm{th}\ u)\right) \end{array}$$

Le support de cette paramétrisation est appelé la *pseudo-sphère de rayon* R. On pose

$$e_u(u,v) = \left(-\frac{\cos v}{\mathrm{ch}u}, -\frac{\sin v}{\mathrm{ch}u}, \mathrm{th}u\right) \quad \text{et} \quad e_v(u,v) = (-\sin v, \cos v, 0)\,.$$

et on rappelle que pour tout $u \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{ch}^2 u - \mathrm{sh}^2 u = 1, \mathrm{ch}' u = \mathrm{sh}u, \mathrm{sh}' u = \mathrm{ch}u \text{ et } \mathrm{th}u = \frac{\mathrm{sh}u}{\mathrm{ch}u}$$



La pseudo-sphère

1) i) Écrire f_u et f_v en fonction de e_u et e_v.
ii) Déterminer les coefficients E, F et G de la première forme fondamentale I de f dans la base (f_u, f_v).

2) i) Montrer que l'élément d'aire vaut

$$dS = R^2 \frac{\mathrm{sh}u}{\mathrm{ch}^2 u} du dv$$

ii) En déduire que f est régulière.
iii) Montrer que

$$\lim_{X \to +\infty} \int_0^X \frac{\mathrm{sh}u}{\mathrm{ch}^2 u} du = 1$$

et en déduire l'aire de f restreinte à $]0, +\infty[\times[0, 2\pi]$.

3) Soit R_θ la rotation d'angle θ par rapport à l'axe (Oz). Montrer que le support S de f est stable par R_θ i. e. $R_\theta(S) \subset S$.

4) i) Déterminer une normale unitaire N aux points où f est régulière (on choisira celle pour laquelle la coordonnée en z est positive)

5) i) Déterminer les coordonnées du vecteur $w = (\cos v, \sin v, 0)$ dans la base orthonormée (e_u, e_v, N).

ii) Décomposer f_{uu}, f_{uv} et f_{vv} dans la base (e_u, e_v, N).
iii) Déterminer les coefficients $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de la seconde forme fondamentale de f dans la base (f_u, f_v).
iv) Montrer que la courbure de Gauss $K(u, v)$ de f est constante et négative.
v) Écrire la matrice A de l'opérateur de Weingarten W de f dans la base (f_u, f_v) et déterminer les courbures principales λ_1 et λ_2.

6) Soit $\gamma(u) = \frac{1}{R}(u, u)$. On considère la courbe $u \mapsto \overline{\gamma}(u) = f \circ \gamma(u)$.
i) Montrer que $\overline{\gamma}$ est paramétrée par la longueur d'arc.
ii) Exprimer $\overline{\gamma}''$ dans la base (e_u, e_v, N).
iii) Montrer que la courbure principale $k_{\overline{\gamma}}$ de $\overline{\gamma}$ ne s'annule jamais.
iv) Montrer que la normal principale $n_{princ}(u)$ de $\overline{\gamma}(u)$ est incluse dans le plan tangent à f en $\overline{\gamma}(u)$.
v) En déduire que $\overline{\gamma}$ est une courbe asymptotique.
Suggestion.– Utiliser le théorème de Meusnier.

7) Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to]0, +\infty[$ et

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & I & \longrightarrow &]0, +\infty[\times\mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) = \frac{1}{R}(\varphi(t), t) \end{array}$$

Déterminer φ pour que $\overline{\gamma} = f \circ \gamma$ soit une courbe asymptotique.

8) Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $\delta : I \to]0, +\infty[\times[0, 2\pi]$, $t \mapsto (u(t), v(t))$, une courbe paramétrée. On note $\overline{\delta} = f \circ \delta$.
i) Déterminer les coordonnées de $\delta''(t)$ dans la base (e_u, e_v, N) en fonction de R, u, v, u', v', u'' et v''.
ii) On suppose désormais que $\overline{\delta}$ est une géodésique paramétrée par la longueur d'arc. Montrer que

$$\begin{cases} u''\mathrm{sh}u + \dfrac{1}{\mathrm{ch}u}(u'^2 + v'^2) = 0 & (1) \\ v'' - 2u'v'\mathrm{th}u = 0 & (2) \end{cases}$$

iii) On suppose en outre que $v'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\forall t \in I, \quad v'(t) = k\,\mathrm{ch}^2 u(t)$$

Suggestion.– Remarquer que l'équation (2) est à variables séparées.
iv) Soit $\rho(t)$ la distance de $\overline{\delta}(t)$ à l'axe (Oz) et $\theta(t)$ l'angle entre $\overline{\delta}'(t)$ et e_v. Déduire de la question précédente que la fonction $t \mapsto \rho(t)\cos\theta(t)$ est constante (c'est la *relation de Clairaut*).