Université Claude Bernard Lyon 1

M1G – Géométrie

Corrigé du contrôle final du mercredi 9 janvier 2019

Les documents sont autorisés mais les calculettes et les portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Exercice. – [7 pts ?] Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une submersion de classe C^∞. On note $S = F^{-1}(0)$ et on suppose $S \neq \emptyset$.

1) L'ensemble S est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^3$? On justifiera la réponse.

Rép.– L'ensemble S est une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$. Cela résulte du théorème de la submersion (CM sur les sous-variétés).

2) Soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point de S. Montrer que si $\frac{\partial F}{\partial z}(M_0) \neq 0$ alors il existe un voisinage V_1 de (x_0, y_0), un voisinage V_2 de z_0 et une application $\varphi : V_1 \to V_2$ telle que

$$(x, y, z) \in (V_1 \times V_2) \cap S \iff (x, y) \in V_1 \text{ et } z = \varphi(x, y)$$

.

Rép.– C'est une application directe du théorème des fonctions implicites.

3) Montrer que φ est C^∞ sur V_1 et que pour tout $(x, y) \in V_1$ on a

$$d\varphi_{(x,y)} = -\frac{F_x(x, y, \varphi(x, y))}{F_z(x, y, \varphi(x, y))}dx - \frac{F_y(x, y, \varphi(x, y))}{F_z(x, y, \varphi(x, y))}dy$$

Rép.– Le théorème des fonctions implicites assure aussi que si F est C^∞ alors il est de même pour φ. De plus on a

$$d\varphi_{(x,y)} = -\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^{-1} \circ \frac{\partial F}{\partial(x, y)} \, (x, y, \varphi(x, y))$$

où $\frac{\partial F}{\partial(x,y)}$ désigne la différentielle de $(x, y) \mapsto F(x, y, z)$. Ici on a

$$\frac{\partial F}{\partial(x, y)}(x, y, \varphi(x, y)) = F_x(x, y, \varphi(x, y))dx + F_y(x, y, \varphi(x, y))dy$$

d'où l'expression demandée.

4) Soit $f : V_1 \to \mathbb{R}^3$ la paramétrisation d'un voisinage de M_0 dans S donnée par

$$f(x,y) = (x, y, \varphi(x,y))$$

Montrer que f est régulière.

Rép.– On a

$$f_x(x,y) = (1, 0, -\frac{F_x(x,y,\varphi(x,y))}{F_z(x,y,\varphi(x,y))}) \text{ et } f_y(x,y) = (0, 1, -\frac{F_x(x,y,\varphi(x,y))}{F_z(x,y,\varphi(x,y))})$$

d'où

$$(f_x \wedge f_y)(x,y) = \left(\frac{F_x(x,y,\varphi(x,y))}{F_z(x,y,\varphi(x,y))}, \frac{F_x(x,y,\varphi(x,y))}{F_z(x,y,\varphi(x,y))}, 1\right)$$

Ce vecteur n'est jamais nul puisque sa troisième composante vaut 1. Ainsi f est régulière.

5) Montrer qu'une équation cartésienne du plan tangent à S en M_0 est donnée par

$$F_x(M_0)(X - x_0) + F_y(M_0)(Y - y_0) + F_z(M_0)(Z - z_0) = 0.$$

Rép.– Notons que $N(x_0, y_0) = (F_x(M_0), F_y(M_0), F_z(M_0))$ est un vecteur normal à S en M_0 puisqu'il est proportionnel à $(f_x \wedge f_y)(x_0, y_0)$. Par conséquent, un point $M = (X, Y, Z)$ est dans $T_{M_0}S$ si et seulement si

$$\langle \overrightarrow{M_0 M}, N(x_0, y_0) \rangle = 0.$$

L'écriture de cette condition fournit l'équation demandée.

Problème. – [13 pts ?] Soit $R > 0$. On considère la surface paramétrée donnée par

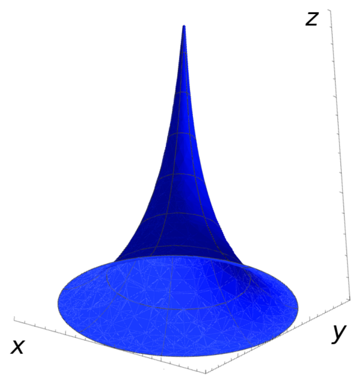
$$\begin{array}{rccc} f : &]0, +\infty[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & R\left(\dfrac{\cos v}{\text{ch} u}, \dfrac{\sin v}{\text{ch} u}, (u - \text{th } u)\right) \end{array}$$

Le support de cette paramétrisation est appelé la *pseudo-sphère de rayon* R. On pose

$$e_u(u,v) = \left(-\frac{\cos v}{\text{ch} u}, -\frac{\sin v}{\text{ch} u}, \text{th} u\right) \quad \text{et} \quad e_v(u,v) = (-\sin v, \cos v, 0)\,.$$

et on rappelle que pour tout $u \in \mathbb{R}$

$$\text{ch}^2 u - \text{sh}^2 u = 1, \text{ch}' u = \text{sh} u, \text{sh}' u = \text{ch} u \text{ et } \text{th} u = \frac{\text{sh} u}{\text{ch} u}$$



La pseudo-sphère

1) i) Écrire f_u et f_v en fonction de e_u et e_v.
ii) Déterminer les coefficients E, F et G de la première forme fondamentale I de f dans la base (f_u, f_v).

Rép.– i) On a

$$\begin{aligned} f_u &= R\left(-\frac{\mathrm{sh}u\cos v}{\mathrm{ch}^2 u}, -\frac{\mathrm{sh}u\sin v}{\mathrm{ch}^2 u}, \mathrm{th}^2 u\right) \\ &= R\,\mathrm{th}u\left(-\frac{\cos v}{\mathrm{ch}u}, -\frac{\sin v}{\mathrm{ch}u}, \mathrm{th}u\right) \\ f_v &= \frac{R}{\mathrm{ch}u}\left(-\sin v, \cos v, 0\right) \end{aligned}$$

Ainsi

$$f_u = R\,\mathrm{th}u\; e_u \quad \text{et} \quad f_v = \frac{R}{\mathrm{ch}u}\, e_v$$

ii) On constate que e_u et e_v sont unitaires et perpendiculaire entre eux ainsi

$$E = \langle f_u, f_u\rangle = R^2\mathrm{th}^2 u, \quad F = \langle f_u, f_v\rangle = 0, \quad G = \langle f_v, f_v\rangle = \frac{R^2}{\mathrm{ch}^2 u}$$

2) i) Montrer que l'élément d'aire vaut

$$dS = R^2\frac{\mathrm{sh}u}{\mathrm{ch}^2 u}dudv$$

ii) En déduire que f est régulière.
iii) Montrer que

$$\lim_{X\to+\infty}\int_0^X \frac{\mathrm{sh}u}{\mathrm{ch}^2 u}du = 1$$

et en déduire l'aire de f restreinte à $]0, +\infty[\times[0, 2\pi]$.

Rép.– i) Un calcul direct montre que

$$dS = \sqrt{EG - F^2}dudv = R^2 \frac{|\mathrm{th}u|}{\mathrm{ch}u}dudv = R^2 \frac{|\mathrm{sh}u|}{\mathrm{ch}^2 u}dudv$$

et puisque $u \in [0, +\infty[$, on a $|\mathrm{sh}u| = \mathrm{sh}u$.
ii) D'après le cours, on sait que

$$\|f_u \wedge f_v\| = \sqrt{EG - F^2}$$

donc f est régulière en (u, v) si et seulement si $\sqrt{(EG - F^2)}(u, v) > 0$. Or $\sqrt{(EG - F^2)}(u, v) = R^2 \frac{\mathrm{th}^2 u}{\mathrm{ch}^2 u}$ d'après le calcul de dS donc f est régulière ssi $\mathrm{sh}u \neq 0$ ssi $u \neq 0$.
iii) On a

$$\int \mathrm{sh}u \; \mathrm{ch}^{-2}u = -\mathrm{ch}^{-1}u + Cte$$

d'où

$$\int_0^X \mathrm{sh}u \; \mathrm{ch}^{-2}udu = 1 - \frac{1}{\mathrm{ch}X}$$

et

$$\lim_{X \to +\infty} \int_0^X \frac{\mathrm{sh}u}{\mathrm{ch}^2 u}du = 1.$$

On a

$$Aire(f) = \lim_{X \to +\infty} \int_0^X \int_0^{2\pi} dS = \lim_{X \to +\infty} \int_0^X \int_0^{2\pi} R^2 \frac{\mathrm{sh}u}{\mathrm{ch}^2 u}dudv = 2\pi R^2$$

3) Soit R_θ la rotation d'angle θ par rapport à l'axe (Oz). Montrer que le support S de f est stable par R_θ i. e. $R_\theta(S) \subset S$.

Rép.– Soit

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie par un calcul direct que

$$R_\theta(f(u, v)) = f(u, v + \theta)$$

ainsi S est stable par R_θ

4) i) Déterminer une normale unitaire N aux points où f est régulière (on choisira celle pour laquelle la coordonnée en z est positive)

Rép.– i) Un calcul montre que

$$f_u \wedge f_v = -\frac{\mathrm{sh}u}{\mathrm{ch}^2 u}\left(\mathrm{th}u\cos v, \mathrm{th}u\sin v, \frac{1}{\mathrm{ch}u}\right)$$

A priori, on peut donc choisir indifféremment

$$N(u, v) = \pm\left(\mathrm{th}u\cos v, \mathrm{th}u\sin v, \frac{1}{\mathrm{ch}u}\right)$$

Pour avoir la coordonnée en z est positive, il faut prendre le signe $+$.

5) i) Déterminer les coordonnées du vecteur $w = (\cos v, \sin v, 0)$ dans la base orthonormée (e_u, e_v, N).
ii) Décomposer f_{uu}, f_{uv} et f_{vv} dans la base (e_u, e_v, N).
iii) Déterminer les coefficients $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de la seconde forme fondamentale de f dans la base (f_u, f_v).
iv) Montrer que la courbure de Gauss $K(u, v)$ de f est constante et négative.
v) Écrire la matrice A de l'opérateur de Weingarten W de f dans la base (f_u, f_v) et déterminer les courbures principales λ_1 et λ_2.

Rép.– i) On a

$$\langle w, e_u \rangle = \langle \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\dfrac{\cos v}{\mathrm{ch} u} \\ -\dfrac{\sin v}{\mathrm{ch} u} \\ \mathrm{th} u \end{pmatrix} \rangle = -\frac{1}{\mathrm{ch} u}$$

$$\langle w, N \rangle = \langle \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{sh} u \cos v}{\mathrm{ch} u} \\ \dfrac{\mathrm{sh} u \sin v}{\mathrm{ch} u} \\ \dfrac{1}{\mathrm{ch} u} \end{pmatrix} \rangle = \frac{\mathrm{sh} u}{\mathrm{ch} u}$$

et $\langle w, e_v \rangle = 0$. Ainsi

$$w = -\frac{1}{\mathrm{ch} u} e_u + \frac{\mathrm{sh} u}{\mathrm{ch} u} e_v$$

ii) On a

$$\begin{aligned}
f_{uu} &= R\,\frac{1}{\mathrm{ch}^2 u}\left(-\frac{\cos v}{\mathrm{ch} u}, -\frac{\sin v}{\mathrm{ch} u}, \mathrm{th} u\right) + R\,\mathrm{th} u \left(\frac{\mathrm{sh} u \cos v}{\mathrm{ch}^2 u}, \frac{\mathrm{sh} u \sin v}{\mathrm{ch}^2 u}, \frac{1}{\mathrm{ch}^2 u}\right) \\
&= R\,\frac{1}{\mathrm{ch}^2 u} e_u + R \frac{\mathrm{sh} u}{\mathrm{ch}^2 u} N \\
f_{uv} &= -R \frac{\mathrm{sh} u}{\mathrm{ch}^2 u} (-\sin v, \cos v, 0) \\
&= -R \frac{\mathrm{sh} u}{\mathrm{ch}^2 u} e_v \\
f_{vv} &= -\frac{R}{\mathrm{ch} u} (\cos v, \sin v, 0) \\
&= \frac{R}{\mathrm{ch}^2 u} e_u - R \frac{\mathrm{sh} u}{\mathrm{ch}^2 u} N
\end{aligned}$$

iii) On en déduit immédiatement

$$\mathcal{L} = R \frac{\mathrm{sh} u}{\mathrm{ch}^2 u}, \;\; \mathcal{M} = 0, \;\; \mathcal{N} = -R \frac{\mathrm{sh} u}{\mathrm{ch}^2 u}$$

iv) D'après une question précédente, on a

$$EG - F^2 = R^4 \frac{\mathrm{sh}^2 u}{\mathrm{ch}^4 u}$$

On a également

$$\mathcal{L}\mathcal{N}-\mathcal{M}^2=-R^2\frac{\mathrm{sh}^2 u}{\mathrm{ch}^4 u}$$

d'où

$$K=\frac{\mathcal{L}\mathcal{N}-\mathcal{M}^2}{EG-F^2}=-\frac{1}{R^2}$$

v) On a

$$A=\begin{pmatrix} E & F\\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M}\\ \mathcal{M} & \mathcal{N}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{ch}^2 u}{R^2\mathrm{sh}^2 u} & 0\\ 0 & \frac{\mathrm{ch}^2 u}{R^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{R\mathrm{sh} u}{\mathrm{ch}^2 u} & 0\\ 0 & -\frac{R\mathrm{sh} u}{\mathrm{ch}^2 u}\end{pmatrix}$$

d'où

$$A=\frac{1}{R}\begin{pmatrix} \frac{1}{\mathrm{sh} u} & 0\\ 0 & -\mathrm{sh} u\end{pmatrix}$$

et $\lambda_1=\frac{1}{R\mathrm{sh} u}$, $\lambda_2=-\frac{\mathrm{sh} u}{R}$.

6) Soit $\gamma(u)=\frac{1}{R}(u,u)$. On considère la courbe $u\mapsto\overline{\gamma}(u)=f\circ\gamma(u)$.
i) Montrer que $\overline{\gamma}$ est paramétrée par la longueur d'arc.
ii) Exprimer $\overline{\gamma}''$ dans la base (e_u,e_v,N).
iii) Montrer que la courbure principale $k_{\overline{\gamma}}$ de $\overline{\gamma}$ ne s'annule jamais.
iv) Montrer que la normal principale $n_{princ}(u)$ de $\overline{\gamma}(u)$ est incluse dans le plan tangent à f en $\overline{\gamma}(u)$.
v) En déduire que $\overline{\gamma}$ est une courbe asymptotique.
Suggestion.– Utiliser le théorème de Meusnier.

Rép.– i) Puisque $\overline{\gamma}=f\circ\gamma$, on a

$$\begin{aligned}\overline{\gamma}'(u) &= \tfrac{1}{R}f_u(\gamma(u))+\tfrac{1}{R}f_v(\gamma(u))\\ &= \mathrm{th}u\; e_u+\tfrac{1}{\mathrm{ch}u}e_v\end{aligned}$$

d'où

$$\|\overline{\gamma}'(u)\|^2=\frac{\mathrm{sh}^2 u}{\mathrm{ch}^2 u}+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 u}=1.$$

ii) De même, on a

$$\begin{aligned}\overline{\gamma}''(u) &= \tfrac{1}{R^2}\left(f_{uu}(\gamma(u))+2f_{uv}(\gamma(u))+f_{vv}(\gamma(u))\right)\\ &= R^{-1}\left(\tfrac{1}{\mathrm{ch}^2 u}e_u+\tfrac{\mathrm{sh}u}{\mathrm{ch}^2 u}N-2\tfrac{\mathrm{sh}u}{\mathrm{ch}^2 u}e_v+\tfrac{1}{\mathrm{ch}^2 u}e_u-\tfrac{\mathrm{sh}u}{\mathrm{ch}^2 u}N\right)\\ &= 2R^{-1}\left(\tfrac{1}{\mathrm{ch}^2 u}e_u-\tfrac{\mathrm{sh}u}{\mathrm{ch}^2 u}e_v\right)\\ &= \tfrac{2}{R\mathrm{ch}u}\left(\tfrac{1}{\mathrm{ch}u}e_u-\tfrac{\mathrm{sh}u}{\mathrm{ch}u}e_v\right)\end{aligned}$$

iii) Puisque $\frac{1}{\mathrm{ch}u}e_u-\frac{\mathrm{sh}u}{\mathrm{ch}u}e_v$ est de norme 1 et que $\frac{2}{R\mathrm{ch}u}>0$ on en déduit que

$$k_{\overline{\gamma}}(u)=\frac{2}{R\mathrm{ch}u}>0\quad\text{ et }\quad n_{princ}(u)=\frac{1}{\mathrm{ch}u}e_u-\frac{\mathrm{sh}u}{\mathrm{ch}u}e_v$$

iv) L'expression de n_{princ} montre que $n_{princ}\in Vect(e_u,e_v)=Vect(f_u,f_v)$.
v) Le théorème de Meusnier affirme que

$$k_{\overline{\gamma}'(u)}(u)=k_{\overline{\gamma}(u)}\langle N(\overline{\gamma}(u)),n_{princ}(u)\rangle.$$

où $k_{\overline{\gamma}'(u)}(u)$ est la courbure normale dans la direction $\overline{\gamma}'(u)$. Puisque $n_{princ} \in Vect(e_u, e_v)$ on a

$$\langle N(\overline{\gamma}(u)), n_{princ}(u)\rangle = 0$$

d'où $k_{\overline{\gamma}'(u)}(u)$ pour tout u, ce qui montre que $\overline{\gamma}$ est une courbe asymptotique.

7) Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to]0, +\infty[$ et

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & I & \longrightarrow &]0, +\infty[\times\mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) = \frac{1}{R}(\varphi(t), t) \end{array}$$

Déterminer φ pour que $\overline{\gamma} = f \circ \gamma$ soit une courbe asymptotique.

Rép.– La courbe $\overline{\gamma}$ est asymptotique si et seulement si

$$\forall t \in I, \quad II(\overline{\gamma}'(t), \overline{\gamma}'(t)) = 0$$

Puisque $\gamma(t) = \frac{1}{R}(\varphi(t), t)$ on a

$$\overline{\gamma}'(t) = \frac{1}{R}\varphi'(t) f_u(\overline{\gamma}(t)) + \frac{1}{R} f_v(\overline{\gamma}(t))$$

Dans la base (f_u, f_v), on a donc $\overline{\gamma}'(t) = \frac{1}{R}(\varphi'(t), 1)$ et

$$II(\overline{\gamma}'(t), \overline{\gamma}'(t)) = \frac{1}{R^2}(\varphi'(t), 1)\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{R^2}\left(\mathcal{L}\varphi'^2(t) + 2\mathcal{M}\varphi'(t) + \mathcal{N}\right)$$

En remplaçant $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ par leurs valeurs on obtient

$$II(\overline{\gamma}'(t), \overline{\gamma}'(t)) = \frac{\text{sh}\,\varphi(t)}{R\text{ch}^2\varphi(t)}(\varphi'^2(t) - 1)$$

Puisque $\varphi(t) \in]0, +\infty[$, on a sh $\varphi(t) > 0$ et

$$II(\overline{\gamma}'(t), \overline{\gamma}'(t)) = 0 \iff \varphi'^2(t) - 1 = 0 \iff \varphi'(t) = \pm 1 \iff \varphi(t) = t + t_0 \text{ ou } -t + t_1$$

avec $I =] - t_0, +\infty[$ ou $I =] - \infty, t_1[$.

8) Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $\delta : I \to]0, +\infty[\times[0, 2\pi]$, $t \mapsto (u(t), v(t))$, une courbe paramétrée. On note $\overline{\delta} = f \circ \delta$.

i) Déterminer les coordonnées de $\delta''(t)$ dans la base (e_u, e_v, N) en fonction de R, u, v, u', v', u'' et v''.

ii) On suppose désormais que $\overline{\delta}$ est une géodésique paramétrée par la longueur d'arc. Montrer que

$$\begin{cases} u''\text{sh}u + \dfrac{1}{\text{ch}u}(u'^2 + v'^2) = 0 & (1) \\ v'' - 2u'v'\text{th}u = 0 & (2) \end{cases}$$

iii) On suppose en outre que $v'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\forall t \in I, \quad v'(t) = k\,\text{ch}^2 u(t)$$

Suggestion.– Remarquer que l'équation (2) est à variables séparées.
iv) Soit $\rho(t)$ la distance de $\overline{\delta}(t)$ à l'axe (Oz) et $\theta(t)$ l'angle entre $\overline{\delta}'(t)$ et e_v. Déduire de la question précédente que la fonction $t \mapsto \rho(t)\cos\theta(t)$ est constante (c'est la *relation de Clairaut*).

Rép.– i) On a

$$\overline{\delta}'(t) = u'(t)f_u(\overline{\delta}(t)) + v'(t)f_v(\overline{\delta}(t))$$

puis

$$\begin{aligned}
\overline{\delta}'' &= u''f_u(\overline{\delta}) + v''f_v(\overline{\delta}) \\
&\quad + u'^2 f_{uu}(\overline{\delta}) + 2u'v'f_{uv}(\overline{\delta}) + v'^2(t)f_{vv}(\overline{\delta}) \\
&= u''R\mathrm{th}u\; e_u + v''\tfrac{R}{\mathrm{ch}u}e_v + u'^2\left(R\,\tfrac{1}{\mathrm{ch}^2 u}e_u + R\tfrac{\mathrm{sh}u}{\mathrm{ch}^2 u}N\right) \\
&\quad + 2u'v'\left(-R\tfrac{\mathrm{sh}u}{\mathrm{ch}^2 u}e_v\right) + v'^2\left(\tfrac{R}{\mathrm{ch}^2 u}e_u - R\tfrac{\mathrm{sh}u}{\mathrm{ch}^2 u}N\right) \\
&= R(u''\mathrm{th}u + u'^2\tfrac{1}{\mathrm{ch}^2 u} + v'^2\tfrac{1}{\mathrm{ch}^2 u})e_u \\
&\quad + R(v''\tfrac{1}{\mathrm{ch}u} - 2u'v'\tfrac{\mathrm{sh}u}{\mathrm{ch}^2 u})e_v + R\tfrac{\mathrm{sh}u}{\mathrm{ch}^2 u}(u'^2 - v'^2)N
\end{aligned}$$

ii) Si δ'' est une géodésique alors sa composante tangentielle est nulle ce qui signifie que

$$\begin{cases} u''\mathrm{sh}u + \dfrac{1}{\mathrm{ch}u}(u'^2 + v'^2) = 0 & (1) \\ v'' - 2u'v'\mathrm{th}u = 0 & (2) \end{cases}$$

iii) Puisque par hypothèse $v'(t) \neq 0$ pour tout t, on a

$$(2) \iff \frac{v''}{v'} = 2u'\frac{\mathrm{sh}u}{\mathrm{ch}u}u \iff \ln v' = 2\ln\mathrm{ch}u + c \iff v' = k\mathrm{ch}^2 u$$

iv) Notons $\overline{\delta}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. On a d'une part

$$\rho(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \frac{R}{\mathrm{ch}u(t)}$$

D'autre part, puisque $\overline{\delta}(t)$ est paramétrée par la longueur d'arc

$$\cos\theta(t) = \langle\overline{\delta}'(t), e_v\rangle = \langle u'(t)R\;\mathrm{th}u(t)e_u + v'(t)\frac{R}{\mathrm{ch}u(t)}e_v, e_v\rangle = v'(t)\frac{R}{\mathrm{ch}u(t)}$$

Au bilan

$$\rho(t)\cos\theta(t) = v'(t)\frac{R^2}{\mathrm{ch}^2 u(t)}$$

D'après la question précédente $v' = k\mathrm{ch}^2 u$ ainsi

$$\rho(t)\cos\theta(t) = kR^2.$$