Université Claude Bernard Lyon 1

M1G – Géométrie

Contrôle final du 15 janvier 2021 – Durée : 2h

Les documents sont autorisés mais les calculettes et les portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Notations.– Comme toujours, toutes les applications sont supposées C^∞. Pour alléger les écritures, on note parfois dans ce sujet ∂_x et ∂_y pour $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$; f_x et f_y pour $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Première partie : Le lemme de Poincaré.– Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\eta = Pdx + Qdy$ une 1-forme sur U. On dit que la forme η est *exacte* s'il existe $\psi : U \to \mathbb{R}$ tel que $\eta = d\psi$. On dit que η est *fermée* si $d\eta = 0$, autrement dit si $\partial_x Q - \partial_y P = 0$.

1) On suppose que la 1-forme η est exacte. Montrer qu'elle est fermée.

On dit qu'un ouvert U est *étoilée par rapport à l'origine* si pour tout point $(x, y) \in U$, le segment joignant l'origine à ce point est inclus dans U. On suppose désormais dans cette partie que U étoilée par rapport à l'origine.

2) Pour tout point $(x, y) \in U$ on note $\gamma_{x,y} = (\gamma^1_{x,y}, \gamma^2_{x,y})$ la courbe plane paramétrée joignant linéairement l'origine à (x, y) :

$$\begin{array}{rccl} \gamma_{x,y} : & [0,1] & \to & U \\ & t & \mapsto & (\gamma^1_{x,y}(t), \gamma^2_{x,y}(t)) = (tx, ty). \end{array}$$

et on considère la composée $g_{x,y} = P \circ \gamma_{x,y}$.

a) Montrer que

$$P(x, y) = \int_0^1 g_{x,y}(t) + tg'_{x,y}(t)dt.$$

b) Montrer que

$$g'_{x,y}(t) = x(\partial_x P)(tx, ty) + y(\partial_y P)(tx, ty).$$

3) On considère la fonction $\xi : U \to \mathbb{R}$ définie par

$$\xi(x, y) := \int_{\gamma_{x,y}} \eta.$$

a) Montrer que

$$\xi(x, y) := x \int_0^1 P(tx, ty)dt + y \int_0^1 Q(tx, ty)dt$$

b) Montrer que

$$\partial_x \xi(x,y) = \int_0^1 P(tx,ty) + tx(\partial_x P)(tx,ty) + ty(\partial_x Q)(tx,ty)\,dt$$

c) Puis que

$$\partial_x \xi(x,y) = \int_0^1 g_{x,y}(t) + t g'_{x,y}(t)\,dt + y\int_0^1 t\left(\partial_x Q - \partial_y P\right)(tx,ty)\,dt$$

d) On suppose que la 1-forme η est fermée. En déduire que pour tout $(x,y)\in U$, on a

$$\partial_x \xi(x,y) = P(x,y).$$

e) Montrer que si η est fermée sur U alors

$$d\xi = \eta.$$

En particulier, η est exacte. Ce résultat est connu sous le nom de *lemme de Poincaré* pour les ouverts étoilées.

Seconde partie : Coordonnées isothermes.– Soit

$$f: \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,y,h(x,y)) \end{array}$$

une paramétrisation cartésienne où $h : U \to \mathbb{R}$ est C^∞ et U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ étoilée par rapport à l'origine. On note

$$p = h_x \quad \text{et} \quad q = h_y.$$

La première forme fondamentale de f s'écrit donc

$$E = \langle f_x, f_x\rangle = 1+p^2, \quad F = \langle f_x, f_y\rangle = pq \quad \text{et} \quad G = \langle f_y, f_y\rangle = 1+q^2$$

Une telle paramétrisation est régulière sur U. Son élément d'aire est donnée par

$$d^2S = W\,dxdy \quad \text{avec} \quad W = (1+p^2+q^2)^{1/2}.$$

Sa courbure de Gauss et sa courbure moyenne ont pour expression

$$K = \frac{p_x q_y - p_y q_x}{W^4} \quad \text{et} \quad H = \frac{(1+q^2)p_x - pq(p_y+q_x) + (1+p^2)q_y}{2W^3}.$$

Notons que dans ces écritures on peut remplaçer indifféremment p_y par q_x ou inversement (théorème de Schwarz).

4) On considère la 1-forme différentielle $\alpha \in \Omega^1(U)$ définie par

$$\alpha := \frac{1+p^2}{W}dx + \frac{pq}{W}dy.$$

i) Montrer que $d\alpha = (qA_1 + pA_2)dx \wedge dy$ avec

$$A_1 = \frac{(W^2 - p^2)p_x + (1+p^2)q_y - qpq_x}{W^3} \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{(q_x - 2p_y)W^2 + (1+p^2)p_y}{W^3}$$

ii) En remplaçant q_x par p_y dans A_2 puis W^2 par sa valeur, montrer que

$$d\alpha = 2qH dx \wedge dy.$$

On introduit une seconde forme différentielle $\beta \in \Omega^1(U)$ définie par

$$\beta := \frac{pq}{W}dx + \frac{1+q^2}{W}dy.$$

et on admet que $d\beta = -2pHdx \wedge dy$. On suppose que f est la paramétrisation d'une surface minimale, autrement dit que la fonction courbure moyenne H est identiquement nulle. Ainsi α et β sont toutes les deux des formes fermées sur U donc exactes d'après le lemme de Poincaré.

5) Soient $\xi_\alpha : U \to \mathbb{R}$ et $\xi_\beta : U \to \mathbb{R}$ telles que $d\xi_\alpha = \alpha$ et $d\xi_\beta = \beta$. On définit $\varphi : U \overset{C^\infty}{\to} \mathbb{R}^2$ par

$$\varphi(x,y) = (\varphi^1(x,y), \varphi^2(x,y)) = (x + \xi_\alpha(x,y), y + \xi_\beta(x,y)).$$

a) Soit

$$J\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^1_x & \varphi^1_y \\ \varphi^2_x & \varphi^2_y \end{pmatrix}$$

la matrice jacobienne de φ. Montrer que

$$J\varphi = \frac{1}{W}\begin{pmatrix} W + 1 + p^2 & pq \\ pq & W + 1 + q^2 \end{pmatrix}$$

b) Montrer que son déterminant vaut

$$det\ J\varphi = \frac{(W+1)^2}{W}.$$

c) En déduire qu'il existe un ouvert $U_0 \subset U$ contenant l'origine tel que $\varphi : U_0 \to \varphi(U_0)$ soit un difféomorphime.

6) On note

$$\begin{array}{cccc} \psi : & \varphi(U_0) & \longrightarrow & U_0 \\ & (u,v) & \longmapsto & (x,y) = (\psi^1(u,v), \psi^2(u,v)) \end{array}$$

l'inverse de φ et on considère la reparamétrisation $g = f \circ \psi$ de f.

a) Montrer que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} g_u(u,v) & = & \psi_u^1(u,v) f_x(\psi(u,v)) + \psi_u^2(u,v) f_y(\psi(u,v)) \\ g_v(u,v) & = & \psi_v^1(u,v) f_x(\psi(u,v)) + \psi_v^2(u,v) f_y(\psi(u,v)) \end{array} \right.$$

b) Montrer que

$$(J\psi)(\varphi(x,y)) = \frac{1}{(1+W)^2} \begin{pmatrix} W+1+q^2 & -pq \\ -pq & W+1+p^2 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

7) On pose $Z := W + 1$.

a) Montrer que

$$p^2 + q^2 = Z(Z-2).$$

b) Montrer que

$$\langle g_u, g_v \rangle = \frac{pq}{Z^4}(Z^2 - 2Z - p^2 - q^2)$$

c) En déduire que g_u et g_v sont orthogonaux.

8) a) Montrer que

$$Z^4 \langle g_u, g_u \rangle = (1+p^2) Z^2 + 2q^2 Z + q^2(q^2 + p^2)$$

b) En déduire que : $\|g_u\|^2 = \frac{W^2}{(W+1)^2}$.

c) Montrer également que $\|g_v\|^2 = \frac{W^2}{(W+1)^2}$.

9) Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ le support d'une surface paramétrée régulière. On dit qu'une paramétrisation g de S est *isothermale* si

$$\|g_u\| = \|g_v\| \quad \text{et} \quad \langle g_u, g_v \rangle = 0.$$

Montrer que si S est minimale alors elle admet au voisinage de chacun de ses points une paramétrisation isothermale.

Culture.– En réalité, toute surface paramétrée régulière admet au voisinage de chacun de ses points une reparamétrisation isothermale. En général, cette reparamétrisation est obtenue en résolvant une EDP : l'équation de Beltrami. L'hypothèse $H \equiv 0$ permet une autre approche. Dans ce cas, il se trouve que l'on peut construire une reparamétrisation explicite au moyen des primitives des formes α et β.