Université Claude Bernard Lyon 1

M1G – Géométrie

Contrôle terminal du 15 décembre 2022 - durée 3h

Les documents sont autorisés mais les calculettes et les portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Exercice. – Soit $a > 0$. On considère la courbe d'équation polaire

$$\rho(\theta) = a \cos 3\theta$$

où $\theta \in \mathbb{R}$ (le *trifolium*).

1) La courbe en polaire ρ est-elle régulière ?

2) Donner une équation cartésienne de la tangente à la courbe en $\theta = \pi/3$.

3) Soit $\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ avec $x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta$ et $y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta$.
a) Montrer que pour tout θ on a $\gamma(\theta + \pi) = \gamma(\theta)$.
b) Soit R la rotation de centre l'origine et d'angle $-2\pi/3$. Montrer que pour tout θ on a $\gamma(\theta + \pi/3) = R \circ \gamma(\theta)$.
c) Montrer que l'on peut réduire l'intervalle d'étude de γ à $[0, \pi/6]$.

4) Donner une représentation graphique du support de la courbe.

5) a) Montrer que la restriction de γ à $[-\pi/6, \pi/6]$ est une courbe fermée.
b) Calculer l'aire enclose par la restriction de γ à $[-\pi/6, \pi/6]$.

Problème. – Le but de ce problème est l'étude des courbes et surfaces parallèles. Les parties sont relativement indépendantes.

Partie I : Enveloppes de courbes.– Soit I un intervalle et $f_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $t \in I$, une famille à un paramètre de submersions. On note

$$\Gamma_t = f_t^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_t(x, y) = 0\}$$

le lieu des zéros, que l'on suppose non vide, de chaque f_t et

$$S = F^{-1}(0) = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times I \mid f_t(x, y) = 0\}$$

celui de l'application

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, t) & \longmapsto & f_t(x, y). \end{array}$$

1) a) Montrer que chaque Γ_t est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$.
b) L'ensemble S est-il une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^2 \times I$? Justifier.
c) Soit $p_0 = (x_0, y_0, t_0) \in S$ un point de S. Donner une condition suffisante portant sur une dérivée de F pour qu'il existe un paramétrage cartésien local de S autour de p_0, c'est-à-dire pour qu'il existe une application

$$h : \begin{array}{ccc} \mathcal{U}_0 & \to & \mathcal{V}_0 \\ (x,y) & \mapsto & h(x,y) \end{array}$$

telle que

$$p = (x,y,t) \in S \cap \mathcal{W}_0 \quad \iff \quad t = h(x,y)$$

où $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{V}_0$ et $\mathcal{W}_0$ sont des voisinages de (x_0, y_0), t_0 et p_0 respectivement.

2) Dans cette question, on étudie l'exemple $f_t(x,y) = (x-t)^2 + y^2 - 1$ avec $t \in \mathbb{R}$.
a) Montrer que chaque application f_t est une submersion exceptée en un point.
b) Déterminer la nature de chaque Γ_t.
c) Déterminer la nature de S et le dessiner.
d) On note

$$\mathcal{E} = \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 \,|\, F(x,y,t) = 0 \text{ et } \frac{\partial F}{\partial t}(x,y,t) = 0\}.$$

Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ est une union de deux droites.
e) Déterminer l'ensemble $E \subset \mathbb{R}^2$ des points obtenus en projetant $\mathcal{E}$ orthogonalement sur le plan (Oxy).

3) On revient au cas général (on ne suppose plus que f_t est donnée par l'expression de la question 2). On continue de noter $\mathcal{E} \subset S$ le sous-ensemble de S donné par

$$\mathcal{E} = \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^2 \times I \,|\, F(x,y,t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial t}(x,y,t) = 0\}$$

et E sa projection orthogonale dans $\mathbb{R}^2$. Autrement dit, $E = proj(\mathcal{E})$ où $proj : \mathbb{R}^2 \times I \to \mathbb{R}^2$ est la projection orthogonale

$$p = (x,y,t) \mapsto q = (x,y).$$

L'ensemble E est appelé l'*enveloppe de la famille de courbes* Γ_t.
a) Écrire la matrice jacobienne $Jac\,\Phi$ de l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,t) & \longmapsto & \left(F(x,y,t), \frac{\partial F}{\partial t}(x,y,t)\right). \end{array}$$

b) Montrer qu'il existe une sous-matrice carrée 2×2 de $Jac\,\Phi$ dont tous les termes sont donnés par le gradient de f_t et celui de $\frac{\partial f_t}{\partial t}$.
c) On suppose que $\mathcal{E}$ est non vide. Montrer que si les gradients

$$\text{grad } f_t \quad \text{et} \quad \text{grad } \frac{\partial f_t}{\partial t}$$

de f_t et de $\frac{\partial f_t}{\partial t}$ sont linéairement indépendants alors $\mathcal{E}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2 \times I$ dont on précisera la dimension.

Partie II : Courbes parallèles dans le plan.– On suppose désormais que les ensembles Γ_t sont des cercles. Précisément, on considère les applications $f_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ données sous la forme

$$f_t(x,y) = (x - u(t))^2 + (y - v(t))^2 - r^2$$

où $r > 0$ est un nombre donné et $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (u(t), v(t))$ est une courbe régulière.

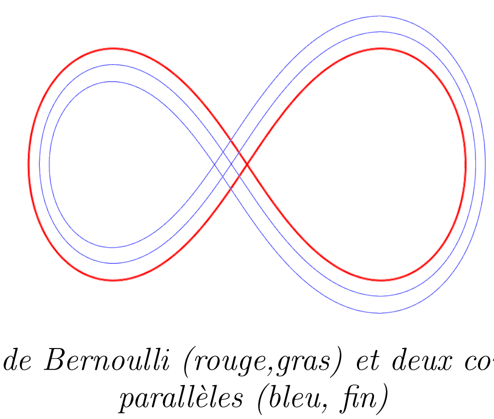
4) a) Soit $p = (q,t)$ avec $q = (x,y)$. Exprimer $\frac{\partial F}{\partial t}(p)$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{\gamma(t)q}$ et de $\gamma'(t)$.
b) On suppose qu'au point $p = (q,t)$ on a $\frac{\partial F}{\partial t}(p) = 0$. Montrer que

$$\langle \overrightarrow{\gamma(t)q}, \gamma'(t) \rangle = 0.$$

c) En déduire que si $q \in E$ alors il existe $t \in I$ tel que

$$q = \gamma(t) \pm r n(t)$$

où n est la normale algébrique de γ.



Une lemniscate de Bernoulli (rouge,gras) et deux courbes qui lui sont parallèles (bleu, fin)

5) Les courbes enveloppes ainsi obtenues s'appellent les *courbes parallèles à la courbe* γ ou encore *courbes offset*. Pour tout $r \in \mathbb{R}$, on

convient de noter γ_r la courbe parallèle donnée par

$$\gamma_r(t) = \gamma(t) + rn(t)$$

pour tout $t \in I$. Pour simplifier les calculs, on fait l'hypothèse que γ est paramétrée par la longueur d'arc.
a) Montrer que $\gamma_r' = (1 - rk_{alg})\gamma'$.
b) Montrer que si la courbure algébrique de γ est bornée et si r est suffisamment petit alors la courbe γ_r est régulière.
c) On note $\theta : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\gamma'(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$$

pour tout $t \in I$. Montrer que $\theta'(t) = k_{alg}$.
d) On suppose $I = [a, b]$. Montrer que si r est suffisamment petit

$$Long(\gamma_r) = Long(\gamma) - r(\theta(b) - \theta(a)).$$

e) Dans l'illustration donnée dans ce sujet, à votre avis, quelle est la longueur des courbes parallèles à la lemniscate de Bernouilli ?

Partie III : Courbes parallèles dans la sphère.– On note

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. Soit $\gamma : I \to \mathbb{S}^2$ une courbe paramétrique régulière, paramétrée par la longueur d'arc, dont le support est inclus dans $\mathbb{S}^2$.

6) a) Soit O l'origine de $\mathbb{R}^3$. Montrer que pour tout $t \in I$, le vecteur $n(t) := \overrightarrow{O\gamma}(t)$ est un vecteur normal à γ en t.
b) Pour tout $t \in I$, on pose $b(t) = n(t) \wedge \gamma'(t)$. Montrer que b est un vecteur normal à γ en t.

7) Pour tout $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on définit la *courbe parallèle à γ de paramètre α* par

$$\begin{array}{rccl} \gamma_\alpha : & I & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & O + \cos(\alpha).n(t) + \sin(\alpha).b(t) \end{array}$$

où n et b sont tels que définis à la question précédente.
a) Montrer que $\gamma_0 = \gamma$.
b) Montrer que le support de γ_α est inclus dans $\mathbb{S}^2$.
c) En déduire que $n_\alpha = \overrightarrow{O\gamma_\alpha}(t)$ est un vecteur normal de γ_α et t.

8) a) Montrer que pour tout α le vecteur $b(t)$ est normal à γ_α en t.
b) Montrer que $\gamma'(t)$ est un vecteur tangent à $\gamma_\alpha(t)$.
c) Puisque les courbes γ_α ont le même vecteur unitaire tangent $\gamma'(t)$

pour tout $t \in I$, peut-on en déduire que ces courbes ont la même courbure que celle de γ ? Justifier.

FORMULAIRE TRIGONOMÉTRIQUE.–

$$\tan' \theta = 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta, \quad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\begin{aligned}
\cos p + \cos q &= 2 \cos \tfrac{p+q}{2} \cos \tfrac{p-q}{2} \\
\cos p - \cos q &= -2 \sin \tfrac{p+q}{2} \sin \tfrac{p-q}{2} \\
\sin p + \sin q &= 2 \sin \tfrac{p+q}{2} \cos \tfrac{p-q}{2} \\
\sin p - \sin q &= 2 \sin \tfrac{p-q}{2} \cos \tfrac{p+q}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \\
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc}
\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1 & \mathrm{ch}^2 t + \mathrm{sh}^2 t = \mathrm{ch} 2t \\
\tanh x = \dfrac{\mathrm{sh} x}{\mathrm{ch} x} & \mathrm{sh}(2t) = 2 \mathrm{sh} t \, \mathrm{ch} t \\
\mathrm{sh}' t = \mathrm{ch} t & \mathrm{ch}' t = \mathrm{sh} t
\end{array}$$