Université Claude Bernard Lyon 1

M1G – Géométrie

Corrigé du contrôle terminal du 15 décembre 2022 - durée 3h

Les documents sont autorisés mais les calculettes et les portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Exercice. – Soit $a > 0$. On considère la courbe d'équation polaire

$$\rho(\theta) = a\cos 3\theta$$

où $\theta \in \mathbb{R}$ (le *trifolium*).

1) La courbe en polaire ρ est-elle régulière ?

Rép.– Notons $\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ avec $x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta$ et $y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta$. On a

$$\begin{array}{rcl} \|\gamma'(\theta)\|^2 & = & x'^2(\theta) + y'^2(\theta) \\ & = & \rho^2(\theta) + (\rho')^2(\theta) \\ & = & a^2\cos^2 3\theta + 9a^2\sin^2 3\theta \\ & = & a^2(1 + 8\sin^2 3\theta) \geq a^2. \end{array}$$

Par conséquent, la courbe est régulière en tout point $\theta \in]-\pi, \pi]$.

2) Donner une équation cartésienne de la tangente à la courbe en $\theta = \pi/3$.

Rép.– D'une part, on a $x'(\theta) = -a(3\sin 3\theta\cos\theta + \cos 3\theta\sin\theta)$ et $y'(\theta) = a(-3\sin 3\theta\sin\theta + \cos 3\theta\cos\theta)$ d'où $x'(\pi/3) = a\sqrt{3}/2$ et $y'(\pi/3) = -a/2$. D'autre part $x(\pi/3) = -a/2$ and $y(\pi/3) = -a\sqrt{3}/2$. Une équation cartésienne de la tangente en $\theta_0 = \pi/3$ est donnée par

$$x'(\theta_0)(y - y(\theta_0)) - y'(\theta_0)(x - x(\theta_0)) = 0$$

soit

$$\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(y + a\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{a}{2}\left(x + \frac{a}{2}\right) = 0$$

et puisque $a \neq 0$,

$$\sqrt{3}\left(y + \frac{\sqrt{3}a}{2}\right) + \left(x + \frac{a}{2}\right) = 0$$

finalement

$$\sqrt{3}y + x + 2a = 0.$$

3) Soit $\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ avec $x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta$ et $y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta$.
a) Montrer que pour tout θ on a $\gamma(\theta + \pi) = \gamma(\theta)$.

b) Soit R la rotation de centre l'origine et d'angle $-2\pi/3$. Montrer que pour tout θ on a $\gamma(\theta+\pi/3) = R \circ \gamma(\theta)$.
c) Montrer que l'on peut réduire l'intervalle d'étude de γ à $[0, \pi/6]$.

Rép.– a) Evident puisque $\rho(\theta+\pi) = -\rho(\theta)$, $\cos(\theta+\pi) = -\cos(\theta)$ et $\sin(\theta+\pi) = -\sin(\theta)$.
b) On a $\rho(\theta+\pi/3) = -\rho(\theta)$ et

$$\begin{array}{rcl} \cos(\theta+\pi/3) & = & \frac{1}{2}\cos(\theta) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \\ \sin(\theta+\pi/3) & = & \frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta). \end{array}$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} x(\theta+\pi/3) & = & \rho(\theta+\pi/3)\cos(\theta+\pi/3) = -\frac{1}{2}x(\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2}y(\theta) \\ y(\theta+\pi/3) & = & \rho(\theta+\pi/3)\sin(\theta+\pi/3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}x(\theta) - \frac{1}{2}y(\theta) \end{array}$$

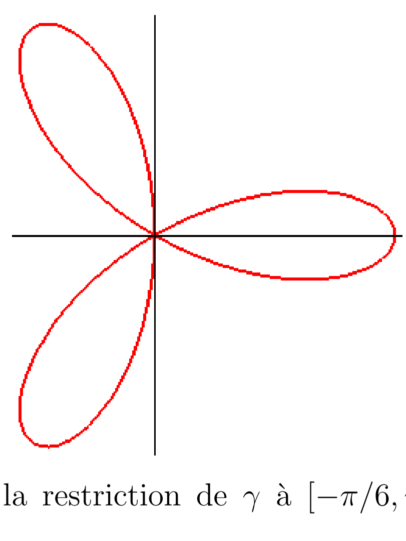
soit

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} x(\theta+\pi/3) \\ y(\theta+\pi/3) \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} \cos(-2\pi/3) & -\sin(-2\pi/3) \\ \sin(-2\pi/3) & \cos(-2\pi/3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} \end{array}$$

Ceci montre que $\gamma(\theta+\pi/3) = R \circ \gamma(\theta)$.
c) On a aussi $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$ et par conséquent l'axe des abscisses est un axe de symétrie. Le a) montre que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $]-\pi/2, \pi/2]$, le b) permet de réduire à $]-\pi/6, \pi/6]$ et le c) à $[0, \pi/6]$.

4) Donner une représentation graphique du support de la courbe.

Rép.–



5) a) Montrer que la restriction de γ à $[-\pi/6, \pi/6]$ est une courbe fermée.
b) Calculer l'aire enclose par la restriction de γ à $[-\pi/6, \pi/6]$.

Rép.– a) On a $\rho(\pi/6) = \rho(-\pi/6) = 0$ donc $\gamma(-\pi/6) = \gamma(-\pi/6) = O$. La courbe est fermée.
b) La formule de Green-Riemann s'écrit ici

$$\text{Aire enclose} = \frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} (x(\theta)y'(\theta) - x'(\theta)y(\theta))d\theta$$

Or

$$\begin{aligned} x(\theta)y'(\theta) - x'(\theta)y(\theta) &= a^2(\cos 3\theta\cos\theta)(-3\sin 3\theta\sin\theta + \cos 3\theta\cos\theta) \\ &\quad -a^2(\cos 3\theta\sin\theta)(-3\sin 3\theta\cos\theta - \cos 3\theta\sin\theta) \\ &= a^2\cos^2 3\theta \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \text{Aire enclose} &= \frac{a^2}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^2 3\theta\ d\theta. \\ &= \frac{a^2}{6}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 u\ du \\ &= \frac{a^2}{6}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2u}{2}\ du \\ &= \frac{\pi a^2}{12} \end{aligned}$$

Problème. – Le but de ce problème est l'étude des courbes et surfaces parallèles. Les parties sont relativement indépendantes.

Partie I : Enveloppes de courbes.– Soit I un intervalle et $f_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $t \in I$, une famille à un paramètre de submersions. On note

$$\Gamma_t = f_t^{-1}(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_t(x,y) = 0\}$$

le lieu des zéros, que l'on suppose non vide, de chaque f_t et

$$S = F^{-1}(0) = \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^2 \times I \mid f_t(x,y) = 0\}$$

celui de l'application

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,t) & \longmapsto & f_t(x,y). \end{array}$$

1) a) Montrer que chaque Γ_t est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$.
b) L'ensemble S est-il une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^2 \times I$? Justifier.
c) Soit $p_0 = (x_0, y_0, t_0) \in S$ un point de S. Donner une condition suffisante portant sur une dérivée de F pour qu'il existe un paramétrage cartésien local de S autour de p_0, c'est-à-dire pour qu'il existe une application

$$h : \begin{array}{ccc} \mathcal{U}_0 & \to & \mathcal{V}_0 \\ (x,y) & \mapsto & h(x,y) \end{array}$$

telle que

$$p = (x,y,t) \in S \cap \mathcal{W}_0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = h(x,y)$$

où $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{V}_0$ et $\mathcal{W}_0$ sont des voisinages de (x_0, y_0), t_0 et p_0 respectivement.

Rép.– a) Puisque $f_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une submersion, $\Gamma_t = f_t^{-1}(0)$ est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$.
b) Le gradient de l'application F est

$$\text{grad } F(x,y,t) = \left(\text{grad } f_t(x,y), \frac{\partial F}{\partial t}(x,y,t)\right).$$

Ce gradient ne s'annule jamais car, par hypothèse, le gradient de f_t ne s'annule pas. Donc F est une submersion et $S = F^{-1}(0)$ une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^2 \times I$.
c) Soit $p_0 = (x_0, y_0, t_0) \in S$, c'est-à-dire $F(x_0, y_0, t_0) = 0$. Il suffit de supposer que

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x_0, y_0, t_0) \neq 0$$

pour obtenir le résultat souhaité. En effet, on peut alors appliquer le théorème des fonctions implicites pour obtenir l'existence de

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathcal{U}_0 & \to & \mathcal{V}_0 \\ & (x,y) & \mapsto & h(x,y) \end{array}$$

telle que

$$p = (x,y,t) \in S \cap \mathcal{W}_0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = h(x,y).$$

2) Dans cette question, on étudie l'exemple $f_t(x,y) = (x-t)^2 + y^2 - 1$ avec $t \in \mathbb{R}$.
a) Montrer que chaque application f_t est une submersion exceptée en un point.
b) Déterminer la nature de chaque Γ_t.
c) Déterminer la nature de S et le dessiner.
d) On note

$$\mathcal{E} = \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 \,|\, F(x,y,t) = 0 \text{ et } \frac{\partial F}{\partial t}(x,y,t) = 0\}.$$

Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ est une union de deux droites.
e) Déterminer l'ensemble $E \subset \mathbb{R}^2$ des points obtenus en projetant $\mathcal{E}$ orthogonalement sur le plan (Oxy).

Rép.– a) On a $\partial_x f_t = 2(x-t)$ et $\partial_y f_t = 2y$ donc f_t est une submersion en tout point sauf le point $(x,y) = (t,0)$.
b) L'ensemble $\Gamma_t = f_t^{-1}(0)$ est un cercle de centre $(t,0)$ et de rayon 1.
c) L'ensemble S est un cylindre penché d'axe $O + Vect(1,0,1)$ et obtenu comme un empilement de chacun des cercles Γ_t :

$$S = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Gamma_t \times \{t\}.$$

d) Soit $p \in \mathcal{E}$. On a

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x,y,t) = 0 \iff -2(x-t) = 0 \iff x = t.$$

Comme de plus $p \in S$, on a

$$F(x,y,t)=0 \iff y^2=1$$

ainsi

$$\mathcal{E}=\{(t,1,t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}\cup\{(t,-1,t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$$

est une union de deux droites.
e) L'ensemble E s'obtient facilement à partir de $\mathcal{E}$:

$$E=\{(t,1)\,|\,t\in\mathbb{R}\}\cup\{(t,-1)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$$

il est constitué des deux droites parallèles $y=1$ et $y=-1$.

3) On revient au cas général (on ne suppose plus que f_t est donnée par l'expression de la question 2). On continue de noter $\mathcal{E}\subset S$ le sous-ensemble de S donné par

$$\mathcal{E}=\{(x,y,t)\in\mathbb{R}^2\times I\,|\,F(x,y,t)=0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial t}(x,y,t)=0\}$$

et E sa projection orthogonale dans $\mathbb{R}^2$. Autrement dit, $E=proj(\mathcal{E})$ où $proj:\mathbb{R}^2\times I\to\mathbb{R}^2$ est la projection orthogonale

$$p=(x,y,t)\mapsto q=(x,y).$$

L'ensemble E est appelé l'*enveloppe de la famille de courbes* Γ_t.
a) Écrire la matrice jacobienne $Jac\,\Phi$ de l'application

$$\begin{array}{rccc}\Phi: & \mathbb{R}^2\times I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ & (x,y,t) & \longmapsto & \left(F(x,y,t),\frac{\partial F}{\partial t}(x,y,t)\right).\end{array}$$

b) Montrer qu'il existe une sous-matrice carrée 2×2 de $Jac\,\Phi$ dont tous les termes sont donnés par le gradient de f_t et celui de $\frac{\partial f_t}{\partial t}$.
c) On suppose que $\mathcal{E}$ est non vide. Montrer que si les gradients

$$\text{grad } f_t \quad \text{et} \quad \text{grad } \frac{\partial f_t}{\partial t}$$

de f_t et de $\frac{\partial f_t}{\partial t}$ sont linéairement indépendants alors $\mathcal{E}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2\times I$ dont on précisera la dimension.

Rép.– a) On a

$$Jac\,\Phi(x,y,t)=\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial t}\\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial t} & \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial t} & \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\end{pmatrix}.$$

b) On remarque que la matrice mineure 2×2

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial t} & \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial t}\end{pmatrix}$$

a une première ligne constituée par le gradient de f_t et la seconde, par le gradient de $\frac{\partial f_t}{\partial t}$.

c) Si ces vecteurs sont linéairement indépendants, cela implique que la matrice est de rang 2 et donc que Φ est une submersion. Puisque $\mathcal{E} = \Phi^{-1}(0)$ on en déduit que $\mathcal{E}$ est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^2 \times I$.

Partie II : Courbes parallèles dans le plan.– On suppose désormais que les ensembles Γ_t sont des cercles. Précisément, on considère les applications $f_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ données sous la forme

$$f_t(x, y) = (x - u(t))^2 + (y - v(t))^2 - r^2$$

où $r > 0$ est un nombre donné et $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (u(t), v(t))$ est une courbe régulière.

4) a) Soit $p = (q, t)$ avec $q = (x, y)$. Exprimer $\frac{\partial F}{\partial t}(p)$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{\gamma(t)q}$ et de $\gamma'(t)$.
b) On suppose qu'au point $p = (q, t)$ on a $\frac{\partial F}{\partial t}(p) = 0$. Montrer que

$$\langle \overrightarrow{\gamma(t)q}, \gamma'(t)\rangle = 0.$$

c) En déduire que si $q \in E$ alors il existe $t \in I$ tel que

$$q = \gamma(t) \pm rn(t)$$

où n est la normale algébrique de γ.

Rép.– a) En dérivant

$$F(x, y, t) = (x - u(t))^2 + (y - v(t))^2 - r^2$$

par rapport à t, il vient

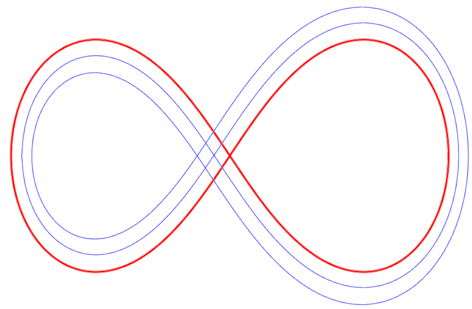
$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) &= -2(x - u(t))u'(t) - 2(y - v(t))v'(t) \\ &= -2\langle \overrightarrow{\gamma(t)q}, \gamma'(t)\rangle.\end{aligned}$$

b) Le résultat découle directement du a).
c) Soit $q = (x, y) \in E$. Il existe donc $t \in I$ tel que $p = (q, t) \in \mathcal{E}$. Ceci signifie que

$$F(x, y, t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0.$$

D'après la question précédente, la seconde équation implique que $q \in \gamma(t) + Vect(n(t))$. La première équation indique que q est sur le cercle de centre $\gamma(t)$ et de rayon r. Ainsi

$$q = \gamma(t) \pm rn(t).$$



Une lemniscate de Bernoulli (rouge,gras) et deux courbes qui lui sont parallèles (bleu, fin)

5) Les courbes enveloppes ainsi obtenues s'appellent les *courbes parallèles à la courbe* γ ou encore *courbes offset*. Pour tout $r \in \mathbb{R}$, on convient de noter γ_r la courbe parallèle donnée par

$$\gamma_r(t) = \gamma(t) + rn(t)$$

pour tout $t \in I$. Pour simplifier les calculs, on fait l'hypothèse que γ est paramétrée par la longueur d'arc.
a) Montrer que $\gamma_r' = (1 - rk_{alg})\gamma'$.
b) Montrer que si la courbure algébrique de γ est bornée et si r est suffisamment petit alors la courbe γ_r est régulière.
c) On note $\theta : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\gamma'(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$$

pour tout $t \in I$. Montrer que $\theta'(t) = k_{alg}$.
d) On suppose $I = [a, b]$. Montrer que si r est suffisamment petit

$$Long(\gamma_r) = Long(\gamma) - r(\theta(b) - \theta(a)).$$

e) Dans l'illustration donnée dans ce sujet, à votre avis, quelle est la longueur des courbes parallèles à la lemniscate de Bernouilli ?

Rép.– a) Une simple dérivation conduit à

$$\gamma_r'(t) = \gamma'(t) + rn'(t)$$

et puisque

$$n'(t) = -k_{alg}(t)\gamma'(t)$$

on obtient

$$\gamma_r' = (1 - rk_{alg})\gamma'.$$

b) Si la courbure algébrique de γ est bornée, disons

$$|k_{alg}(t)| \leq M$$

pour tout $t \in I$ alors, en prenant $r < M^{-1}$, on s'assure que $\gamma_r'(t) \neq 0$ pour tout t. Ce qui montre que γ_r est régulière pour r suffisamment petit.
c) Par définition de la courbure algébrique

$$\gamma''(t) = k_{alg}(t)n(t)$$

où $n(t) = (-\sin\theta(t), \cos\theta(t))$ est la normale algébrique i.e. la base $(\gamma'(t), n(t))$ est directe. Or par simple dérivation

$$\gamma''(t) = \theta'(t)(-\sin\theta(t), \cos\theta(t))$$

ainsi $\theta'(t) = k_{alg}(t)$.
d) Si r est suffisamment petit, la fonction $1 - rk_{alg}(t)$ reste positive sur I et par conséquent

$$Long(\gamma_r) = \int_I |\gamma_r'(t)|dt = \int_I (1 - rk_{alg}(t))|\gamma'(t)|dt = \int_I (1 - rk_{alg}(t))dt.$$

Notons d'une part que puisque γ est paramétrée par la longueur d'arc

$$\int_I 1dt = b - a = Long(\gamma).$$

D'autre part, d'après la question précédente

$$\int_I k_{alg}(t)dt = \int_I \theta'(t)dt = \theta(b) - \theta(a).$$

En fin de compte

$$Long(\gamma_r) = Long(\gamma) - r(\theta(b) - \theta(a)).$$

e) Pour une courbe en forme de 8, $\theta(b) = \theta(a)$. Par conséquent, les courbes parallèles ont toutes la longueur que la courbe de départ, au moins pour r suffisamment petit.

Partie III : Courbes parallèles dans la sphère.– On note

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. Soit $\gamma : I \to \mathbb{S}^2$ une courbe paramétrique régulière, paramétrée par la longueur d'arc, dont le support est inclus dans $\mathbb{S}^2$.

6) a) Soit O l'origine de $\mathbb{R}^3$. Montrer que pour tout $t \in I$, le vecteur $n(t) := \overrightarrow{O\gamma}(t)$ est un vecteur normal à γ en t.
b) Pour tout $t \in I$, on pose $b(t) = n(t) \wedge \gamma'(t)$. Montrer que b est un vecteur normal à γ en t.

Rép.– a) Écrire que le support de γ est inclus dans $\mathbb{S}^2$ c'est dire que

$$\langle \overrightarrow{O\gamma}(t), \overrightarrow{O\gamma}(t) \rangle = 1$$

pour tout $t \in I$. En dérivant par rapport à t il vient

$$\langle \overrightarrow{O\gamma}(t), \overrightarrow{\gamma}'(t) \rangle = 0$$

autrement dit $\overrightarrow{O\gamma}(t)$ est un vecteur normal.
b) Puisque γ est paramétrée par la longueur d'arc, on a $\gamma'(t)$ est de norme 1.

De même $n(t)$ est de norme 1 puisque le support de γ est inclus dans $\mathbb{S}^2$. Ainsi $(n(t), \gamma'(t), b(t))$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$, en particulier $b(t)$ est perpendiculaire à $\gamma'(t)$, donc normal à γ en t.

7) Pour tout $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on définit la *courbe parallèle à γ de paramètre α* par

$$\begin{array}{rccl} \gamma_\alpha : & I & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & O + \cos(\alpha).n(t) + \sin(\alpha).b(t) \end{array}$$

où n et b sont tels que définis à la question précédente.
a) Montrer que $\gamma_0 = \gamma$.
b) Montrer que le support de γ_α est inclus dans $\mathbb{S}^2$.
c) En déduire que $n_\alpha = \overrightarrow{O\gamma_\alpha}(t)$ est un vecteur normal de γ_α et t.

Rép.– a) On remplace α par 0 dans l'expression définissant γ_α :

$$\gamma_0(t) = O + n(t) = O + \overrightarrow{O\gamma}(t) = \gamma(t).$$

b) On a

$$\overrightarrow{O\gamma_\alpha}(t) = \cos\alpha\, n(t) + \sin\alpha\, b(t)$$

d'où

$$\|\overrightarrow{O\gamma_\alpha}(t)\|^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

puisque $\|n(t)\| = \|b(t)\| = 1$ et $\langle n(t), b(t)\rangle = 0$.
c) Il découle de la question 6.a) que le vecteur $n_\alpha(t) := \overrightarrow{O\gamma_\alpha}(t)$ est un vecteur normal à γ_α en t.

8) a) Montrer que pour tout α le vecteur $b(t)$ est normal à γ_α en t.
b) Montrer que $\gamma'(t)$ est un vecteur tangent à $\gamma_\alpha(t)$.
c) Puisque les courbes γ_α ont le même vecteur unitaire tangent $\gamma'(t)$ pour tout $t \in I$, peut-on en déduire que ces courbes ont la même courbure que celle de γ ? Justifier.

Rép.– a) On a

$$\begin{array}{rcl} \langle \gamma_\alpha'(t), b(t)\rangle & = & \langle \cos\alpha\, n'(t) + \sin\alpha\, b'(t), b(t)\rangle \\ & = & \langle \cos\alpha\, n'(t), b(t)\rangle \end{array}$$

car $\langle b'(t), b(t)\rangle = 0$. Puisque

$$n'(t) = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{O\gamma}(t)\right) = \gamma'(t)$$

et que $b(t)$ est normal à γ en t, on déduit $\langle n'(t), b(t)\rangle = 0$ ainsi

$$\forall t \in I, \quad \langle \gamma_\alpha'(t), b(t)\rangle = 0$$

i. e. $b(t)$ est normal à γ_α en t.
b) Puisque $b(t)$ et $\overrightarrow{O\gamma_\alpha(t)}$ sont des vecteurs normaux de γ_α en t, on en déduit que

$$\overrightarrow{O\gamma_\alpha(t)} \wedge b(t)$$

est un vecteur tangent à γ_α en t. Or

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O\gamma_\alpha(t)} \wedge b(t) &= (\cos\alpha\, n(t) + \sin\alpha\, b(t)) \wedge b(t) \\ &= \cos\alpha\, \gamma'(t).\end{aligned}$$

Comme $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on peut en déduire que $\gamma'(t)$ est un vecteur tangent de γ_α en t.

c) Notons avec un indice α les quantités géométriques attachées à γ_α Les formules de Frenet affirment que

$$\gamma_\alpha''(t) = \|\gamma_\alpha'(t)\| k_\alpha(t) n_\alpha(t).$$

Tout ce que nous savons est que $\gamma_\alpha''(t) = \gamma''(t)$. En particulier, les vitesses des courbes γ_α diffèrent de l'une à l'autre, les normales n_α également. On ne peut donc rien conclure sur une éventuelle égalité $k_\alpha = k$. L'étude d'exemples simples montrent d'ailleurs qu'elle n'a pas lieu. Si γ est un grand cercle, γ_α est une parallèle et sa courbure est plus grande que celle du grand cercle.

Formulaire trigonométrique.–

$$\tan'\theta = 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\begin{aligned}\cos p + \cos q &= 2\cos\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q &= -2\sin\tfrac{p+q}{2}\sin\tfrac{p-q}{2} \\ \sin p + \sin q &= 2\sin\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q &= 2\sin\tfrac{p-q}{2}\cos\tfrac{p+q}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a\sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a\cos b + \sin a\sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a\cos b + \sin b\cos a \\ \sin(a-b) &= \sin a\cos b - \sin b\cos a\end{aligned}$$

$$\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1 \qquad \mathrm{ch}^2 t + \mathrm{sh}^2 t = \mathrm{ch} 2t$$

$$\tanh x = \frac{\mathrm{sh} x}{\mathrm{ch} x} \qquad \mathrm{sh}(2t) = 2\mathrm{sh} t\, \mathrm{ch} t$$

$$\mathrm{sh}' t = \mathrm{ch} t \qquad \mathrm{ch}' t = \mathrm{sh} t$$