Université Claude Bernard Lyon 1

M1R – Géométrie : Courbes et surfaces

7 janvier 2011 - Durée 2 heures

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Les deux problèmes sont indépendants. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Il existe une paramétrisation régulière f du plan pour laquelle les cœfficients de la première forme fondamentale vérifient $E = G = 0$ et $F \equiv 1$.

2.– Si D est une droite contenue dans une surface alors tous les points de D sont à courbure de Gauss nulle.

3.– L'hélicoïde est une surface minimale (i.e. à courbure moyenne nulle).

4.– Soit $\gamma : I \longrightarrow S$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc et tracée sur une surface S. Si γ est à la fois une géodésique et une courbe asymptotique de S, alors son support est une portion de droite.

5.– Si S est une surface minimale ($\forall p \in S,\ H(p) = 0$) non plate ($\forall p \in S,\ K(p) \neq 0$) alors il existe en tout point de S exactement deux directions asymptotiques perpendiculaires.

6.– La sphère est la seule surface S de $\mathbb{R}^3$ pour laquelle l'application de Gauss $N : S \longrightarrow \mathbb{S}^2$ soit une bijection.

7.– On considère deux lignes de courbure distinctes s'intersectant en un point p d'une surface S. Si les lignes de courbure sont des droites alors le point p est un ombilic de S.

8.– Les génératrices des surfaces réglées sont des lignes de courbures.

9.– Il existe une paramétrisation conforme de la sphère épointée, c'est-à-dire une paramétrisation de la sphère moins un point dont les cœfficients de la première forme fondamentale vérifient $E = G$ et $F = 0$.

10.– Soit $N : S \longrightarrow \mathbb{S}^2$ l'application de Gauss d'une surface de $\mathbb{R}^3$. Si l'image de N est une courbe alors la surface est plate ($\forall p \in S,\ K(p) = 0$).

Problème. – Soit $0 < b < a$ et $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$. On considère la courbe plane suivante, dite *roulette de Delaunay* :

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \dfrac{b^2}{a} \displaystyle\int_0^t \frac{1}{(1+e\cos u)\sqrt{1-e^2\cos^2 u}} du \\ y(t) & = & b\sqrt{\dfrac{1-e\cos t}{1+e\cos t}} \end{array} \right. \end{array}$$

1) Déterminer les points réguliers de γ.

2) Montrer que la fonction abscisse curviligne a pour expression

$$S(t) = \int_0^t \frac{b}{1+e\cos u} du$$

et déterminer la tangente unitaire $T(t)$ et la normale algébrique unitaire $N_{alg}(t)$ de γ en t.

3) Montrer que

$$k_{alg}(t) = -\frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\langle \frac{dN_{alg}(t)}{dt}, T(t)\rangle.$$

(On pourra reparamétrer γ par l'abscisse curviligne et utiliser les formules de Frenet).

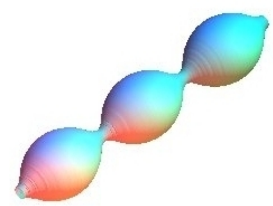
4) Montrer que la courbure algébrique de γ en t est

$$k_{alg}(t) = \frac{1}{a}\frac{e\cos t}{1-e\cos t}.$$

5) On considère la surface de révolution suivante, dite *surface de Delaunay* :

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}\times[0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (t,v) & \longmapsto & (y(t)\cos v, y(t)\sin v, x(t)) \end{array}$$

Calculer la première forme fondamentale de f.



Une surfaces de Delaunay

6) Montrer que les cœfficients de la seconde forme fondamentale sont donnés par

$$\mathcal{L} = -\|\gamma'\|^2 k_{alg}(t), \quad \mathcal{M} = 0 \text{ et } \mathcal{N} = \frac{b}{a}\|\gamma'(t)\|$$

(au signe près dépendant du choix de la normale unitaire).

7) Calculer les cœfficients de l'opérateur de Weingarten et déterminer la courbure de Gauss de f. Déterminer le lieu des points où la courbure de Gauss s'annule.

8) Montrer que la courbure moyenne de f est constante.