Université Claude Bernard Lyon 1

M1R – Géométrie : Courbes et surfaces

6 Janvier 2012 - Durée 2 heures

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Les loxodromies sont des lignes de courbure de la sphère.

2.– Les loxodromies sont des courbes asymptotiques de la sphère.

3.– Il existe sur le tore de révolution une courbe asymptotique fermée.

4.– Il existe sur le tore de révolution une courbe géodésique fermée.

5.– Sur toute surface réglée il existe un point où la courbure de Gauss est strictement positive.

6.– Sur toute surface de rotation il existe un point où la courbure de Gauss est strictement positive.

7.– On dit que $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est doublement périodique (de période 2π) si pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $f(x + 2\pi, y) = f(x, y)$ et $f(x, y + 2\pi) = f(x, y)$. Soit $\alpha = h(x, y)dx \wedge dy$ une 2-forme de $\mathbb{R}^2$ avec h doublemement périodique (de période 2π). Si $\beta = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ est une 1-forme de $\mathbb{R}^2$ telle que $\alpha = d\beta$ alors P et Q sont doublemement périodiques (de période 2π).

8.– Soit $\beta = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ une 1-forme de $\mathbb{R}^2$ avec P et Q doublement périodiques (de période 2π). Soit $\alpha = d\beta = h(x, y)dx \wedge dy$, alors la fonction h est nécessairement doublement périodique (de période 2π).

9.– Si les cœfficients de la première forme fondamentale d'une surface paramétrée régulière sont des fonctions constantes alors la courbure de Gauss est identiquement nulle.

10.– Si les cœfficients de la première forme fondamentale d'une surface paramétrée régulière sont des fonctions constantes alors la courbure moyenne est identiquement nulle.

Problème. – Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée C^∞ dont la première forme fondamentale s'écrit

$$\forall (u,v) \in \mathcal{U}, \quad E(u,v) \equiv 1, \quad F(u,v) = \cos\theta(u,v), \quad G(u,v) \equiv 1$$

avec $\theta : \mathcal{U} \overset{C^\infty}{\longrightarrow}]0,\pi[$. Une telle surface paramétrée est dite *de Tchebychev*.

1) Montrer que f est régulière.

2) En utilisant la formule de Brioschi, démontrer que la courbure de Gauss K de f est donnée par $K = -\frac{\theta_{uv}}{\sin\theta}$.

3) Montrer que f_{uv} est un vecteur normal à la surface.

4) On s'intéresse à la réciproque de la question précédente. On se donne une surface paramétrée régulière

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f} : & \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (s,t) & \longmapsto & \tilde{f}(s,t) \end{array}$$

telle que $\dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial s \partial t}$ soit normale à $\tilde{f}$.

a) Montrer que les cœfficients $\widetilde{E}$ et $\widetilde{G}$ de la première forme fondamentale de $\tilde{f}$ ne dépendent que d'une variable.

b) Soit (s_0,t_0) un point quelconque de $\mathcal{V}$ et $\Phi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\Phi(s,t) = \Big(\int_{s_0}^{s} \sqrt{\widetilde{E}(x,t_0)}dx, \int_{t_0}^{t} \sqrt{\widetilde{G}(s_0,x)}dx\Big).$$

Ecrire la différentielle de Φ en (s_0,t_0). Montrer que Φ est un difféomorphisme sur un voisinage $\mathcal{V}_0$ de (s_0,t_0).

c) On note $\mathcal{U} = \Phi(\mathcal{V}_0)$ et Φ^{-1} la réciproque de $\Phi_{|\mathcal{V}_0}$. On pose aussi

$(u_0, v_0) = \Phi(s_0, t_0)$. Déterminer $d\Phi^{-1}_{(u_0,v_0)}$. Montrer que la surface paramétrée $f := \tilde{f} \circ \Phi^{-1} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est de Tchebychev.

5) Soit $\tilde{f} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière injective dont la courbure de Gauss K est constante et égale à -1. Montrer l'existence en tout point p de $S = \tilde{f}(\mathcal{V})$ de deux directions asymptotiques.

6) On note v_1 et v_2 des vecteurs directeurs des deux directions asymptotiques. Montrer que $dn(v_1) \perp v_1$ et $dn(v_2) \perp v_2$ puis déterminer $n \wedge dn(v_1)$ et $n \wedge dn(v_2)$ où $n : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une normale unitaire.

7) On suppose désormais que $\tilde{f}$ est telle que, en tout point $(s,t) \in \mathcal{V}$, $\tilde{f}_s$ est proportionnelle à v_1 et $\tilde{f}_t$ est proportionnelle à v_2. On pose $N = n \circ \tilde{f}$. Montrer que

$$\tilde{f}_s = -N \wedge N_s \quad \text{et} \quad \tilde{f}_t = N \wedge N_t.$$

8) Montrer que $\tilde{f}_{st} = N_s \wedge N_t$. En déduire que $\tilde{f}$ admet localement un reparamétrage en une surface paramétrée de Tchebychev.