Université Claude Bernard Lyon 1

M1R – Géométrie : Courbes et surfaces

Mardi 7 janvier 2014 - Durée 2 heures

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Les latitudes d'une surface de rotation sont des géodésiques.

2.– Les longitudes d'une surface de rotation sont des géodésiques.

3.– Les règles d'une surface réglée sont des géodésiques.

4.– On suppose que les coefficients de la première forme fondamentale d'une paramétrisation $(u, v) \longrightarrow f(u, v)$ sont $E(u, v) = \varphi_1(u)$, $G(u, v) = \varphi_2(v)$ et $F(u, v) = 0$ avec pour tout (u, v), $\varphi_1(u) > 0$ et $\varphi_2(v) > 0$. Alors la courbure de Gauss de la surface est identiquement nulle.

5.– Soit $(u, v) \longmapsto f(u, v)$ une paramétrisation régulière. On suppose qu'en un point (u_0, v_0) les coefficients de la seconde forme fondamentale valent $\mathcal{L}(u_0, v_0) = 1$, $\mathcal{M}(u_0, v_0) = \frac{1}{2}$ et $\mathcal{N}(u_0, v_0) = 1$ alors, en ce point, la courbure moyenne $H(u_0, v_0)$ ne peut s'annuler.

6.– Si deux paramétrisations régulières $f_1, f_2 : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ ont le même opérateur de Weingarten alors elles sont égales : $f_1 = f_2$.

7.– Soient $f_1, f_2 : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ deux paramétrisations régulières ayant les mêmes courbures principales en tout point. Alors il existe un déplacement h de $\mathbb{E}^3$ tel que $f_2 = h \circ f_1$.

8.– Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une paramétrisation régulière. On suppose qu'en tout point $K(u, v) \geq 1$ alors l'aire de $f(\mathcal{U})$ est plus petite que la somme $\int_{\mathcal{U}} |H(u,v)| d^2S$ où H est la courbure moyenne de f.

9.– Soit S le support d'une surface paramétrée régulière. On suppose qu'il existe un point $p \in S$ où la courbure de Gauss s'annule : $K(p) = 0$. Alors, il existe (au moins) un triangle géodésique[1] $D \subset S$ dont la somme des angles intérieurs vaut π.

10.– L'ensemble $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^3 + z^4 = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

Problème. – Soient $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ deux courbes C^∞ paramétrées par la longueur d'arc et soit f la surface paramétrée définie par

$$\begin{array}{rccc} f: & [a,b] \times [c,d] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & \alpha(u) + \beta(v). \end{array}$$

Une telle surface est dite *de translation.*

1) i) Déterminer les coefficients E, F et G de la première forme fondamentale de f ainsi que les points réguliers de f en fonction de l'angle $\varphi(u,v)$ entre $\alpha'(u)$ et $\beta'(v)$.

ii) On suppose désormais qu'en tout point $\varphi(u,v) \in \,]0, \pi[$. On note $(\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{b}_\alpha)$ (resp.$(\mathbf{t}_\beta, \mathbf{n}_\beta, \mathbf{b}_\beta)$) le trièdre de Frenet de α (resp. de β). Déterminer une normale unitaire $N(u,v)$ en tout point régulier (u,v) de f.

2) i) Déterminer les coefficients $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de la seconde forme fondamentale de f en fonction des courbures principales k_α et k_β de α et de β et de l'angle entre N et $\mathbf{n}_\alpha$ et entre N et $\mathbf{n}_\beta$.

ii) Quel théorème est illustré ici ?

3) Soient θ_α et θ_β tels que $\langle N, \mathbf{n}_\alpha \rangle = \cos\theta_\alpha$ et $\langle N, \mathbf{n}_\beta \rangle = \cos\theta_\beta$.

i) Déterminer la matrice A de l'opérateur de Weingarten W de f dans la base (f_u, f_v).

ii) En déduire les expressions de la courbure de Gauss K et de la courbure moyenne H de f en fonction de θ_α, θ_β, k_α, k_β et φ.

1. C'est-à-dire un domaine simple dont le bord est formé de trois arcs géodésiques.

4) Montrer que si la courbure de Gauss K de f est nulle alors α ou β est une courbe asymptotique de f.

5) Pour cette question seulement on suppose que la courbure principale de α est identiquement nulle : $k_\alpha \equiv 0$. Montrer que f est une surface réglée.

On suppose désormais que α est une courbe birégulière i. e. que l'application k_α ne s'annule jamais.

6) Soit $v_0 \in\ [c,d]$. On suppose que $u \longmapsto f(u,v_0)$ est une courbe asymptotique de f.

i) Montrer que $u \longmapsto f(u,v_0)$ est une ligne de courbure.

ii) Montrer que la normale à la surface N ne dépend pas de u. *Suggestion.–* On pourra considérer le trièdre de Darboux $(\mathbf{t}_\alpha, N, V_\alpha)$ avec $V_\alpha = N \wedge \mathbf{t}_\alpha$.

iii) Déterminer les courbures principales. Que vaut K ?

7) On suppose toujours que $u \longmapsto f(u,v_0)$ est une courbe asymptotique de f.

i) Déduire de la question 2 que pour tout $u \in [a,b]$ on a

$$\mathbf{t}_\beta(v_0) = \cos\varphi(u,v_0)\mathbf{t}_\alpha(u) \pm \sin\varphi(u,v_0)\mathbf{n}_\alpha(u).$$

ii) Déterminer $\mathcal{L}$ en fonction de k_α, φ, $\mathbf{b}_\alpha$ et $\mathbf{t}_\beta$.

iii) En déduire que la torsion τ_α de α est identiquement nulle et donc que la courbe α est plane.

8) Dans cette question, on suppose que $u \longmapsto f(u,v_0)$ est une ligne de courbure de f qui n'est pas une courbe asymptotique. Montrer qu'en tout point (u,v_0) la matrice de la première forme fondamentale est l'identité.

9) On considère la *première surface de Scherk* :

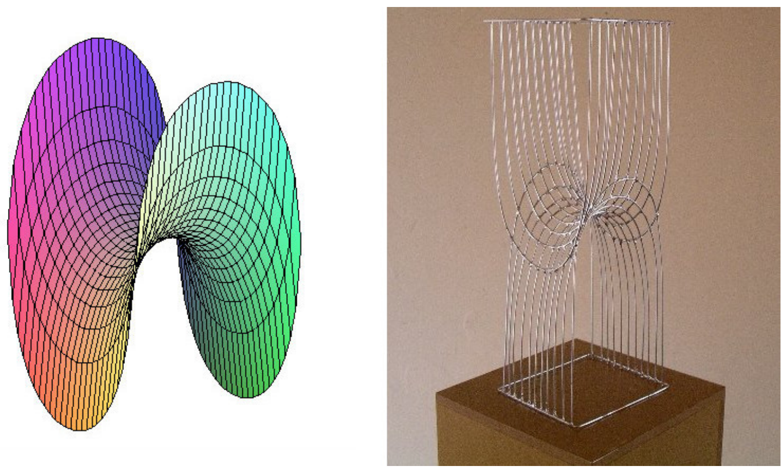
$$\begin{array}{rccc} f: &]0,\frac{\pi}{2}[\times]0,\frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u,v,\ln\left(\frac{\cos u}{\cos v}\right)). \end{array}$$

i) Montrer que f est une surface de translation.

ii) Déterminer les coefficients E, F et G de la première forme fondamentale de f. En déduire que f est régulière.

iii) Déterminer les coefficients $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de la seconde forme fondamentale de f.

iv) Montrer que f est une surface minimale, i e. $H \equiv 0$.



La première surface de Scherk