Université Claude Bernard Lyon 1

M1G – Géométrie : Courbes et surfaces

Examen final du 6 janvier 2015 – Durée 2h

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Soit $\bar{\gamma} : I \longrightarrow S$ une courbe asymptotique. Alors la composante normale de $\bar{\gamma}''$ est nulle.

2.– Soit $\bar{\gamma} : I \longrightarrow S$ une géodésique. S'il existe $s_1 < s_2$ tels que $\bar{\gamma}(s_1) = \bar{\gamma}(s_2)$ alors $\bar{\gamma}$ est périodique et $s_2 - s_1$ est un multiple de la période.

3.– Soit $\bar{\gamma} : I \longrightarrow S$ une ligne de courbure. S'il existe $s_1 < s_2$ tels que $\bar{\gamma}(s_1) = \bar{\gamma}(s_2)$ alors $\bar{\gamma}$ est périodique et $s_2 - s_1$ est un multiple de la période.

4.– Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ le support d'une surface paramétrée régulière et P un plan de $\mathbb{R}^3$. On suppose que $P \cap S$ est le support d'une courbe $\bar{\gamma}$ paramétrée par la longueur d'arc. Si en tout point $p \in P \cap S$ les plans P et T_pS sont orthogonaux alors $\bar{\gamma}$ est une géodésique de S.

5.– On suppose que les coefficients de la première forme fondamentale d'une paramétrisation $(u, v) \longrightarrow f(u, v)$ sont $E(u, v) = 1$, $G(u, v) = \varphi(u)$ et $F(u, v) = 0$ avec pour tout u, $1 > \varphi(u) > 0$ et $\varphi''(u) < 0$. Alors la courbure de Gauss de la surface est strictement positive.

6.– Soit $(u, v) \longmapsto f(u, v)$ une paramétrisation régulière. On suppose que les coefficients de la seconde forme fondamentale valent $\mathcal{L}(u, v) = 1$ et $\mathcal{M}(u, v) = \mathcal{N}(u, v) = \varphi(u)$ avec pour tout u, $1 > \varphi(u) > 0$ et $\varphi''(u) < 0$. Alors la courbure moyenne H ne s'annule en aucun point.

7.– Soit $f :]0, 1[^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une paramétrisation régulière isométrique et

$\phi :]0,1[^2 \longrightarrow]0,1[^2$ telle que $\phi(u,v) = (v,u)$. Alors $f \circ \phi :]0,1[^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une paramétrisation régulière isométrique.

8.– Soit $f_1, f_2 :]0,1[^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ deux paramétrisations régulières isométriques entre elles et $\phi :]0,1[^2 \longrightarrow]0,1[^2$ telle que $\phi(u,v) = (v,u)$. Alors $f_1 \circ \phi$ et f_2 sont isométriques.

9.– Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow S$ une surface paramétrée régulière, injective et plate (i. e. dont la courbure de Gauss est identiquement nulle) et $\gamma : I \longrightarrow \mathcal{U}$ une courbe C^∞ fermée simple. Alors l'intégrale de la courbure géodésique de $\bar{\gamma} = f \circ \gamma$ vaut $\int_{\bar{\gamma}} k_g ds = 2\pi$.

10.– L'ensemble $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - 2z^2 = 0\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

Problème. – Soit $\alpha : [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière C^∞ paramétrée par la longueur d'arc et soit f la surface paramétrée définie par

$$\begin{array}{rccc} f : & [0,L] \times [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & \alpha(u) + r(\cos(v)n(u) + \sin(v)b(u)). \end{array}$$

où n et b sont la normale principale et la binormale de α et $r > 0$. Une telle surface est dite *tubulaire de courbe centrale* α *et de rayon* r.

1) On note $t = \alpha'$, k la courbure principale de α et τ sa torsion.

i) Montrer que

$$\forall (u,v) \in [0,L] \times [0,2\pi], \quad f_u(u,v) = (1 - rk(u)\cos v)t(u) + \tau(u) f_v(u,v).$$

ii) Déterminer les coefficients E, F et G de la première forme fondamentale de f.

iii) Montrer que si r est suffisamment petit, alors f est surface régulière.

iv) Déterminer une normale unitaire $N(u,v)$ aux points (u,v) où f est régulière.

2) On suppose désormais que r est choisi suffisamment petit pour que f soit régulière en tout point. Montrer que l'aire de $f([0,L] \times [0,2\pi])$ ne dépend que de r et de la longueur de α.

3) i) Déterminer les coefficients $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de la seconde forme fondamentale de f en fonction de k, τ, r et v.

ii) En déduire la courbure de Gauss K de f en tout point.

4) i) Montrer que pour tout $u \in [0, L]$, $v \mapsto f(u, v)$ est une ligne de courbure.

ii) En déduire les directions et les courbures principales de f et déterminer la courbure moyenne H.

iii) Écrire la matrice A de l'opérateur de Weingarten dans la base $(t, \frac{1}{r} f_v)$.

5) Donner l'expression du réseau des lignes de courbures orthogonales aux lignes $v \mapsto f(u, v)$. On pourra s'aider de la fonction $\Psi : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Psi(w) := \int_0^w -\tau(s) ds.$$

Montrer que pour tout $u \in [0, L]$, la courbe $w \longrightarrow \gamma_u(w) := f(u + w, \Psi(w))$ est une ligne de courbure.

6) i) Montrer que pour tout $u \in [0, L]$, $v \longrightarrow f(u, v)$ est une géodésique.

ii) Montrer que $u \mapsto f(u, v)$ est une géodésique si et seulement si

$$\begin{cases} -k' \cos v + k\tau \sin v = 0 & (1) \\ r\tau' - (1 - rk \cos v) k \sin v = 0 & (2) \end{cases}$$

iii) Donner un exemple de choix de courbe non plane α pour laquelle il y ait au moins une courbe $u \mapsto f(u, v)$ qui soit une géodésique.

iv) Montrer que si $u \mapsto f(u, v)$ est une géodésique, alors il existe $Cte \in \mathbb{R}$ telle que

$$-2k \cos v + rk^2 \cos^2 v + r\tau^2 = Cte.$$

v) Montrer que les courbes $u \mapsto f(u, \frac{\pi}{2})$ et $u \mapsto f(u, \frac{3\pi}{2})$ ne sont jamais des géodésiques.

7) On suppose désormais que α est une courbe plane fermée simple.

i) Soit $R = \{(u, v) \in [0, L] \times [0, 2\pi] \mid K(u, v) \geq 0\}$. Déterminer R puis donner une expression de l'aire de $f(R)$ en fonction de L, r et k.

ii) Montrer que l'aire de $f(R)$ ne dépend en fait que de r et de L.

8) On suppose maintenant que α est un cercle. Soient $0 \leq s_1 < s_2 < L$. On pose $D = [s_1, s_2] \times [0, 2\pi]$ et $E = [s_1, s_2] \times [0, \pi]$.

i) Montrer que $\partial f(\partial D)$ est l'une union de quatre supports de courbes géodésiques et que $\partial f(E)$ est une union de deux supports de courbes géodésiques.

ii) Calculer

$$\int_D K d^2 S$$

directement puis au moyen du théorème de Gauss-Bonnet.

iii) Pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème de Gauss-Bonnet, tel qu'il est énoncé dans le cours, pour calculer $\int_E K d^2 S$?