Université Claude Bernard Lyon 1

M1G – Géométrie : Courbes et surfaces

Examen final du 6 janvier 2016

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Soit $t \mapsto \bar{\gamma}(t) = (\cos u(t), \sin u(t), v(t))$, $t \in I$ une courbe régulière tracée sur un cylindre. Alors, les longueurs de $\bar{\gamma}$ et de $t \mapsto \gamma(t) = (u(t), v(t))$, $t \in I$, sont identiques.

2.– Sous les hypothèses que la question 1, les courbes $\bar{\gamma}$ et γ ont la même courbure principale.

3.– On garde les hypothèses que la question 1 et on suppose en outre que la courbe $\bar{\gamma}$ est une géodésique. Alors le support de γ est une portion de droite.

4.– Soit S le support d'une surface paramétrée f régulière et injective et soit $\bar{\gamma} : I \longrightarrow S$ une courbe asymptotique (paramétrée par la longueur d'arc). Alors, pour tout point $t \in I$, l'espace tangent à S au point $\bar{\gamma}(t)$ est le plan osculateur de $\bar{\gamma}$ au même point.

5.– Soient S le support d'une surface paramétrée. On suppose qu'il passe par $p \in S$ deux courbes asymptotiques formant un angle droit. Alors S est minimale en p i.e. $H(p) = 0$.

6.– La pseudosphère n'admet aucun rectangle. On appelle *rectangle* de S, où S est le support d'une surface paramétrée, un domaine simple délimité par quatre portions de géodésiques tel que les angles aux quatre sommets sont tous droits.

7.– Pour toute surface paramétrée de rotation S et pour tout quadrilatère $D \in S$ délimité par deux arcs de méridien et deux lattitudes on a

$$\int_D K d^2 S = 0$$

8.– Soient S_1 et S_2 deux sous-variétés de dimension deux de $\mathbb{R}^3$. On suppose que $S_1 \cap S_2$ est non vide et non restreinte à un singleton, alors $S_1 \cap S_2$ est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$.

9.– L'ensemble $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + x - 2 = 0\}$ est une sous-variété de dimension deux de $\mathbb{R}^3$.

10.– L'ensemble $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 - xyz = 1\}$ définit un ruban de Möbius à trois demi-torsions.

Problème. – Soit $\alpha : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière C^∞ paramétrée par la longueur d'arc et soit f la surface paramétrée définie par

$$\begin{array}{rccc} f: & [0, L] \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & \alpha(u) + v\alpha'(u). \end{array}$$

1) i) Déterminer l'ensemble des points réguliers de f.
ii) Calculer les cœfficients de la première forme fondamentale de f en fonction de v et de la courbure k de α.
iii) Déterminer la normale (unitaire) $N(u, v)$ aux points réguliers de f en fonction de la binormale b de α.

2) i) Déterminer les coefficients $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de la seconde forme fondamentale de f en fonction de k, τ et v.
ii) En déduire la courbure de Gauss K de f aux points réguliers.

3) i) On suppose que la torsion τ de α ne s'annule jamais. Montrer que pour tout $u \in [0, L]$, $(\alpha(u); \alpha'(u), \alpha''(u), \alpha'''(u))$ est un repère de $\mathbb{R}^3$.
ii) Écrire le développement limité à l'ordre 3 au point $(u_0, 0)$ de f dans le repère $(\alpha(u_0); \alpha'(u_0), \alpha''(u_0), \alpha'''(u_0))$. On prêtera attention au fait que $v(u - u_0)^2$ est un terme d'ordre 3...
iii) Soit $u_0 \in [0, L]$ et soit P_{u_0} le plan passant par $\alpha(u_0)$ et engendré par $\alpha''(u_0)$ et $\alpha'''(u_0)$. Montrer que l'intersection de P_{u_0} avec $f(\mathcal{V})$, où $\mathcal{V}$ est un voisinage

suffisamment petit de $(u_0, 0)$, est le support d'une courbe paramétrée σ ayant un point de rebroussement de première espèce en $f(u_0, 0)$.

4) i) Montrer qu'il existe une courbe $\eta : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ paramétrée par la longueur d'arc et telle que pour tout $u \in [0, L]$ la courbure $k_\eta(u)$ de η en u soit celle $k(u)$ de α au même point.
ii) Écrire une application $\Phi : [0, L] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ dont la première forme fondamentale I_Φ soit égale en tout point à celle de f.
iii) Les applications f et Φ sont-elles isométriques entre elles ?

5) Soit $\Phi : [0, L] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ une application dont la première forme fondamentale I_Φ est égale en tout point à celle de f.
i) Montrer que Φ est régulière sur $\mathcal{U} = [0, L] \times \mathbb{R}^*$.
ii) Montrer que pour tout point $(u_0, v_0) \in \mathcal{U}$, il existe un ouvert $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ telle que $\Phi_{|\mathcal{U}_0}$ soit régulière et injective. En déduire que $f_{|\mathcal{U}_0}$ et $\Phi_{|\mathcal{U}_0}$ sont des applications isométriques entre elles.

6) Soient $\epsilon > 0$ et $(u_0, v_0) \in \mathcal{U}_0$. On considère une courbe $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow \mathcal{U}_0$ telle que $\gamma(0) = (u_0, v_0)$. On note $\bar{\gamma} = f \circ \gamma$ et $\delta = \Phi \circ \gamma$ et on suppose que $\bar{\gamma}$ est birégulière et paramétrée par la longueur d'arc.
i) Montrer que δ est paramétrée par la longueur d'arc. Montrer que $\bar{\gamma}$ et δ ont même courbure géodésique : $k_g(\bar{\gamma}) = k_g(\delta)$.
ii) On note $k_{\bar{\gamma}}$ et k_δ les courbures principales de $\bar{\gamma}$ et de δ. Montrer que

$$k_{\bar{\gamma}} = |\cos\theta|\, k_\delta$$

où θ est la fonction angle entre le plan osculateur de $\bar{\gamma}$ et le plan tangent à f.
Indication : On pourra remarquer que pour une courbe plane, la courbure géodésique et la courbure principale coïncident au signe près, puis utiliser les relations de Darboux.

7) Soit $w : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe telle que

$$\forall u \in [0, L], \quad \|w(u)\| = 1, \quad w'(u) \neq 0 \quad \text{et} \quad det(\alpha'(u), w(u), w'(u)) = 0.$$

On considère la surface réglée définie par

$$\begin{array}{rccc} g : & [0, L] \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & \alpha(u) + v w(u). \end{array}$$

Une telle surface est dite *développable*.
i) Montrer qu'il existe une unique courbe de la forme

$$\begin{array}{rccc} \beta : & [0,L] & \longrightarrow & [0,L]\times\mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & (t,\lambda(t)) \end{array}$$

telle que pour tout $t \in [0,L]$, $\langle \bar\beta'(t), w'(t)\rangle = 0$ où $\bar\beta = g\circ\beta$. Cette courbe est dite *arête de rebroussement*.
ii) Montrer que les génératrices $\Delta_u = \{\alpha(u) + vw(u) \mid v\in\mathbb{R}\}$ sont les droites tangentes de $\bar\beta$.
iii) Reconnaître $\bar\beta$ dans le cas où $w = \alpha'$.

SI LE SUJET PARAIT TROP COURT, ON PEUT RAJOUTER UNE QUESTION SUR L'HELICOIDE DEVELOPPABLE ET FAIRE MONTRER QUE LES LIGNES DE COURBURE SONT LES GENERATRICES ET LES LIGNES DE NIVEAU.