Université Claude Bernard Lyon 1

M1G – Géométrie : Courbes et surfaces

Corrigé de l'examen final du 6 janvier 2016

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Soit $t \mapsto \bar{\gamma}(t) = (\cos u(t), \sin u(t), v(t))$, $t \in I$ une courbe régulière tracée sur un cylindre. Alors, les longueurs de $\bar{\gamma}$ et de $t \mapsto \gamma(t) = (u(t), v(t))$, $t \in I$, sont identiques.

Rép.– Vrai. Les surfaces paramétrées

$$f_1(u,v) = (\cos u, \sin u, v) \quad \text{et} \quad f_2(u,v) = (u,v,0)$$

sont isométriques, par conséquent les longueurs de $\bar{\gamma}(t) = f_1(\gamma(t))$ et $\gamma(t) = f_2(\gamma(t))$ sont identiques.

2.– Sous les hypothèses que la question 1, les courbes $\bar{\gamma}$ et γ ont la même courbure principale.

Rép.– Faux. La courbure principale n'est pas un invariant isométrique. Par exemple la courbure de $\gamma(t) = (u, 0)$ est 0 alors que celle de $\bar{\gamma}(t) = (\cos(u), \sin(u), 0)$ vaut 1.

3.– On garde les hypothèses que la question 1 et on suppose en outre que la courbe $\bar{\gamma}$ est une géodésique. Alors le support de γ est une portion de droite.

Rép.– Vrai. Les géodésiques sont invariantes par isométrie et les géodésiques du plan sont des droites.

4.– Soit S le support d'une surface paramétrée f régulière et injective et soit $\bar{\gamma} : I \longrightarrow S$ une courbe asymptotique (paramétrée par la longueur d'arc). Alors, pour tout point $t \in I$, l'espace tangent à S au point $\bar{\gamma}(t)$ est le plan osculateur de $\bar{\gamma}$ au même point.

Rép.– Vrai. On note $T = \bar{\gamma}'$, n une normale unitaire à S et V un fonction vectorielle telle que $s \mapsto (T(s), V(s), n(s))$ soit une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ pour tout $s \in I$. La première équation de Darboux s'écrit $T' = -k_g V + k_T n$ où k_g est la courbure géodésique de $\bar{\gamma}$ et k_T sa courbure normale dans la direction T. Puisque $\bar{\gamma}$ est une courbe asymptotique, on a $k_T = 0$ et donc $T' = -k_g V$ ce qui signifie que V est, au signe près, la normale principale de $\bar{\gamma}$. Ainsi $\bar{\gamma}(s) + Vect(T(s), V(s))$ est le plan osculateur de $\bar{\gamma}$ en s et c'est aussi le plan tangent de S en $\bar{\gamma}(s)$.

5.– Soient S le support d'une surface paramétrée. On suppose qu'il passe par $p \in S$ deux courbes asymptotiques formant un angle droit. Alors S est minimale en p i.e. $H(p) = 0$.

Rép.– Vrai. Si deux courbes asymptotiques forment un angle droit en p cela signifie que la courbure normale en ce point s'annule en deux directions perpendiculaires. L'application de la formule d'Euler

$$k_{e_\theta} = \cos^2\theta\lambda_1 + \sin^2\theta\lambda_2$$

conduit alors aux équations

$$\cos^2\theta\lambda_1 + \sin^2\theta\lambda_2 = 0$$
$$\sin^2\theta\lambda_1 + \cos^2\theta\lambda_2 = 0$$

qui traduisent que les directions données par les angles θ et $\theta + \frac{\pi}{2}$ sont asymptotiques. L'addition montre que $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ i.e. $H(p) = 0$.

6.– La pseudosphère n'admet aucun rectangle. On appelle *rectangle* de S, où S est le support d'une surface paramétrée, un domaine simple délimité par quatre portions de géodésiques tel que les angles aux quatre sommets sont tous droits.

Rép.– Vrai. Si on applique le théorème de Gauss-Bonnet à un rectangle D, on obtient

$$\int_D K d^2S = 0.$$

Or, pour la pseudosphère $K \equiv -1$. Il ne peut donc exister de rectangle sur la pseudosphère.

7.– Pour toute surface paramétrée de rotation S et pour tout quadrilatère $D \in S$ délimité par deux arcs de méridien et deux lattitudes on a

$$\int_D K d^2S = 0$$

Rép.– Faux. L'application de la formule de Gauss-Bonnet montre que

$$\int_{\partial D} k_g ds + \int_D K d^2 S = 0.$$

Les méridiens sont bien des géodésiques de S mais pas les lattitudes en général. On construira aisément des contre-exemples en prenant pour S une sphère.

8.– Soient S_1 et S_2 deux sous-variétés de dimension deux de $\mathbb{R}^3$. On suppose que $S_1 \cap S_2$ est non vide et non restreinte à un singleton, alors $S_1 \cap S_2$ est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$.

Rép.– Faux. Par exemple, l'intersection d'un tore avec l'un de ses plans tangents au cercle de gorge est une courbe en forme de huit qui n'est pas une sous-variété (présence d'un point double).

9.– L'ensemble $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + x - 2 = 0\}$ est une sous-variété de dimension deux de $\mathbb{R}^3$.

Rép.– Vrai. Il suffit de vérifier que $h : \mathbb{R}^3 \setminus \{x = -1/2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(x, y, z) \longrightarrow x^2 + x - 2$ est une submersion puis de constater que $S = h^{-1}(0)$.

10.– L'ensemble $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 - xyz = 1\}$ définit un ruban de Möbius à trois demi-torsions.

Rép.– Faux. Soit $h(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - xyz$. On a $S = h^{-1}(1)$. Une sous-variété définie comme une surface de niveau d'une submersion est toujours orientable. Or, un ruban de Möbius n'est pas orientable.

Problème. – Soit $\alpha : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière C^∞ paramétrée par la longueur d'arc et soit f la surface paramétrée définie par

$$\begin{array}{rccc} f: & [0, L] \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & \alpha(u) + v\alpha'(u). \end{array}$$

1) i) Déterminer l'ensemble des points réguliers de f.
ii) Calculer les cœfficients de la première forme fondamentale de f en fonction de v et de la courbure k de α.
iii) Déterminer la normale (unitaire) $N(u, v)$ aux points réguliers de f en

fonction de la binormale b de α.

Rép.– i) On a $f_u(u,v) = \alpha'(u) + v\alpha''(u) = t(u) + vk(u)n(u)$ et $f_v(u,v) = \alpha'(u)$ d'où $(f_u \wedge f_v)(u,v) = vk(u)n(u) \wedge t(u) = -vk(u)b(u)$ où $t = \alpha'$, n est la normale principale et b la binormale de α. Ainsi

$$\|(f_u \wedge f_v)(u,v)\| = vk(u).$$

Puisque α est birégulière, on a $k(u) > 0$ pour tout $u \in [0,L]$. Ainsi (u,v) est régulier si et seulement si $v \neq 0$.
ii) On a

$$\begin{aligned} E = \langle f_u, f_u\rangle = \langle t(u) + vk(u)n(u), t(u) + vk(u)n(u)\rangle = 1 + v^2k^2(u) \\ F = \langle f_u, f_v\rangle = \langle t(u) + vk(u)n(u), t(u)\rangle = 1 \\ G = \langle f_v, f_v\rangle = \langle t(u), t(u)\rangle = 1 \end{aligned}$$

iii) On a $b(u) = \alpha'(u) \wedge \frac{\alpha''(u)}{\|\alpha''(u)\|}$ d'où

$$N(u,v) = \frac{(f_u \wedge f_v)(u,v)}{\|(f_u \wedge f_v)(u,v)\|} = \frac{-vk(u)b(u)}{vk(u)} = -b(u)$$

2) i) Déterminer les coefficients $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de la seconde forme fondamentale de f en fonction de k, τ et v.
ii) En déduire la courbure de Gauss K de f aux points réguliers.

Rép.– i) On a

$$\begin{aligned} f_{uu} &= k(u)n(u) + vk'(u)n(u) + vk(u)(-k(u)t(u) + \tau(u)b(u)) \\ &= (k(u) + vk'(u))n(u) - vk^2(u)t(u) + vk(u)\tau(u)b(u) \\ f_{uv} &= k(u)n(u) \\ f_{vv} &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \langle f_{vv}, N\rangle = 0 \\ \mathcal{M} &= \langle f_{uv}, N\rangle = 0 \\ \mathcal{L} &= \langle f_{uu}, N\rangle = -vk(u)\tau(u) \end{aligned}$$

ii) On a

$$K = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{EG - F^2} = 0.$$

3) i) On supppose que la torsion τ de α ne s'annule jamais. Montrer que pour tout $u \in [0,L]$, $(\alpha(u); \alpha'(u), \alpha''(u), \alpha'''(u))$ est un repère de $\mathbb{R}^3$.
ii) Écrire le développement limité à l'ordre 3 au point $(u_0, 0)$ de f dans le repère $(\alpha(u_0); \alpha'(u_0), \alpha''(u_0), \alpha'''(u_0))$. On prêtera attention au fait que $v(u-u_0)^2$ est un terme d'ordre 3...

iii) Soit $u_0 \in [0, L]$ et soit P_{u_0} le plan passant par $\alpha(u_0)$ et engendré par $\alpha''(u_0)$ et $\alpha'''(u_0)$. Montrer que l'intersection de P_{u_0} avec $f(\mathcal{V})$, où $\mathcal{V}$ est un voisinage suffisamment petit de $(u_0, 0)$, est le support d'une courbe paramétrée σ ayant un point de rebroussement de première espèce en $f(u_0, 0)$.

Rép.– i) Le seul point non trivial est de montrer que $\alpha'''(u)$ est linéairement indépendant de $\alpha'(u) = t(u)$ et $\alpha''(u) = k(u)n(u)$. On a

$$\tau(u) = \frac{\langle \alpha'(u) \wedge \alpha''(u), \alpha'''(u)\rangle}{\|\alpha'(u) \wedge \alpha''(u)\|^2} = \frac{\langle t(u) \wedge k(u)n(u), \alpha'''(u)\rangle}{\|t(u) \wedge k(u)n(u)\|^2} = \frac{1}{k(u)}\langle b(u), \alpha'''(u)\rangle$$

Puisque $\tau(u) \neq 0$, cela montre que $\alpha'''(u) \notin Vect(\alpha'(u), \alpha''(u))$.
ii) On a

$$\alpha(u) = \alpha(u_0) + (u - u_0)\alpha'(u_0) + \frac{(u - u_0)^2}{2}\alpha''(u_0) + \frac{(u - u_0)^3}{6}\alpha'''(u_0) + o(u - u_0)^3$$

et

$$\alpha'(u) = \alpha'(u_0) + (u - u_0)\alpha''(u_0) + \frac{(u - u_0)^2}{2}\alpha'''(u_0) + o(u - u_0)^2$$

d'où

$$\alpha(u) = \alpha(u_0) + (u - u_0)\alpha'(u_0) + \frac{(u - u_0)^2}{2}\alpha''(u_0) + \frac{(u - u_0)^3}{6}\alpha'''(u_0) + o(h^3)$$

$$v\alpha'(u) = v\alpha'(u_0) + v(u - u_0)\alpha''(u_0) + \frac{v(u - u_0)^2}{2}\alpha'''(u_0) + o(h^3)$$

avec $h = \sqrt{v^2 + (u - u_0)^2}$. Ainsi

$$\begin{aligned} f(u, v) &= \alpha(u_0) + (u - u_0)\alpha'(u_0) + \frac{(u - u_0)^2}{2}\alpha''(u_0) + \frac{(u - u_0)^3}{6}\alpha''(u_0) \\ &\quad + v\alpha'(u_0) + (u - u_0)v\alpha''(u_0) + \frac{v(u - u_0)^2}{2}\alpha'''(u_0) + o(u - u_0)^2 \\ &= \alpha(u_0) + (u - u_0 + v)\alpha'(u_0) + \left((u - u_0)v + \frac{(u - u_0)^2}{2}\right)\alpha''(u_0) \\ &\quad + \left(\frac{(u - u_0)^3}{6} + \frac{v(u - u_0)^2}{2}\right)\alpha'''(u_0) + o(h^3). \end{aligned}$$

iii) Un point $f(u, v)$ est à l'intersection de $f([0, L] \times \mathbb{R})$ et de P_{u_0} si et seulement s'il existe (w_1, w_2) tel que

$$\alpha(u_0) + w_1\alpha''(u_0) + w_2\alpha'''(u_0) = f(u, v).$$

Autrement dit

$$\begin{aligned} \alpha(u_0) + w_1\alpha''(u_0) + w_2\alpha'''(u_0) &= \alpha(u_0) + (u - u_0 + v)\alpha'(u_0) + \left((u - u_0)v + \frac{(u - u_0)^2}{2}\right)\alpha''(u_0) \\ &\quad + \left(\frac{(u - u_0)^3}{6} + \frac{v(u - u_0)^2}{2}\right)\alpha'''(u_0) + o(h^3) \end{aligned}$$

Cette équation possède une solution si et seulement si

$$v = -(u-u_0) + o(h^3)$$

et la courbe intersection σ est donnée par

$$u \mapsto \sigma(u) := f(u, -(u-u_0) + o(h^3))$$

Ainsi

$$\sigma(u) = \alpha(u_0) - \frac{(u-u_0)}{2}\alpha''(u_0) - \frac{(u-u_0)^3}{3}\alpha'''(u_0) + o(h^3)$$

et σ présente un point de rebroussement de première espèce en u_0.

4) i) Montrer qu'il existe une courbe $\eta : [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ paramétrée par la longueur d'arc et telle que pour tout $u \in [0,L]$ la courbure $k_\eta(u)$ de η en u soit celle $k(u)$ de α au même point.
ii) Écrire une application $\Phi : [0,L]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ dont la première forme fondamentale I_Φ soit égale en tout point à celle de f.
iii) Les applications f et Φ sont-elles isométriques entre elles ?

Rép.– i) Il revient au même de rechercher une courbe plane η paramétrée par la longueur d'arc et dont la courbure *algébrique* soit la fonction k (notons que $k(u) > 0$ car α est birégulière). Le théorème fondamental des courbes planes affirme l'existence d'une telle courbe (et son unicité).
ii) Il est naturel de poser

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & [0,L]\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & \eta(u) + v\eta'(u) \end{array}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \Phi_u &= \eta'(u) + v\eta''(u) = t_\eta(u) + vk(u)n_\eta(u) \\ \Phi_v &= \eta'(u) = t_\eta(u) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E_\Phi &= \langle \Phi_u, \Phi_u\rangle = \langle t_\eta(u) + vk(u)n_\eta(u), t_\eta(u) + vk(u)n_\eta(u)\rangle = 1 + v^2k^2(u) \\ F_\Phi &= \langle \Phi_u, \Phi_v\rangle = \langle t_\eta(u) + vk(u)n_\eta(u), t_\eta(u)\rangle = 1 \\ G_\Phi &= \langle \Phi_v, \Phi_v\rangle = \langle t_\eta(u), t_\eta(u)\rangle = 1 \end{aligned}$$

iii) Presque ! L'égalité des premières formes fondamentales ne suffit pas, il faut également que les deux applications f et Φ soient régulières et injectives. L'injectivité n'est pas assurée ici, sans parler de la régularité qui échoue aux points de la forme $(u,0)$. Dans un tel cas, on dit que les applications f et Φ sont *localement* isométriques entre elles au voisinage des points réguliers.

5) Soit $\Phi : [0,L]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2\times\{0\} \subset \mathbb{R}^3$ une application dont la première forme fondamentale I_Φ est égale en tout point à celle de f.

i) Montrer que Φ est régulière sur $\mathcal{U} = [0, L] \times \mathbb{R}^*$.
ii) Montrer que pour tout point $(u_0, v_0) \in \mathcal{U}$, il existe un ouvert $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ telle que $\Phi_{|\mathcal{U}_0}$ soit régulière et injective. En déduire que $f_{|\mathcal{U}_0}$ et $\Phi_{|\mathcal{U}_0}$ sont des applications isométriques entre elles.

Rép.– i) En effet
$$E_\Phi G_\Phi - F_\Phi^2 = EG - F^2 = v^2 k^2(u) > 0$$
si $v \neq 0$.
ii) L'application $\Phi_{|\mathcal{U}}$ est une immersion. D'après le cours (CM-S6), en tout point (u_0, v_0) il existe un voisinage $\mathcal{U}_0$ tel que $\Phi_{|\mathcal{U}_0}$ soit un difféomorphisme sur son image et donc nécessairement injective sur $\mathcal{U}_0$. Si on a oublié ce résultat du cours, on est quitte pour une application du théorème d'inversion locale... De même pour f, il existe un ouvert $\mathcal{U}_1$ tel que $f_{|\mathcal{U}_1}$ soit un difféomorphisme sur son image. On peut évidemment réduire $\mathcal{U}_0$ et $\mathcal{U}_1$ pour qu'ils coïncident, et on renomme $\mathcal{U}_0$ l'ouvert résultant. Au bilan $\Phi_{|\mathcal{U}_0}$ et $f_{|\mathcal{U}_0}$ sont régulières, injectives et ont la même première forme fondamentale, ce sont donc des applications isométriques.

6) Soient $\epsilon > 0$ et $(u_0, v_0) \in \mathcal{U}_0$. On considère une courbe $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow \mathcal{U}_0$ telle que $\gamma(0) = (u_0, v_0)$. On note $\bar\gamma = f \circ \gamma$ et $\delta = \Phi \circ \gamma$ et on suppose que $\bar\gamma$ est birégulière et paramétrée par la longueur d'arc.
i) Montrer que δ est paramétrée par la longueur d'arc. Montrer que $\bar\gamma$ et δ ont même courbure géodésique : $k_g(\bar\gamma) = k_g(\delta)$.
ii) On note $k_{\bar\gamma}$ et k_δ les courbures principales de $\bar\gamma$ et de δ. Montrer que
$$k_{\bar\gamma} = |\cos\theta|\, k_\delta$$
où θ est la fonction angle entre le plan osculateur de $\bar\gamma$ et le plan tangent à f.
Indication : On pourra remarquer que pour une courbe plane, la courbure géodésique et la courbure principale coïncident au signe près, puis utiliser les relations de Darboux.

Rép.– i) Soit $s \in]-\epsilon, \epsilon[$, on a
$$\|\delta'(s)\| = I_\Phi(\gamma'(s), \gamma'(s)) = I_f(\gamma'(s), \gamma'(s)) = \|\bar\gamma'(s)\| = 1.$$
Puisque $\Phi_{|\mathcal{U}_0}$ et $f_{|\mathcal{U}_0}$ sont des isométries et que la courbure géodésique est invariante par isométrie (cours, CM-S5), on a nécessairement $k_g(\bar\gamma) = k_g(\delta)$.
ii) On a $k_\delta = |k_g(\delta)|$ car δ est une courbe plane. Soit $T = (\bar\gamma)'$ et V telle que (T, V, N) soit une base orthonormée. On a (relation de Darboux) :
$$T'(s) = -k_g(\bar\gamma)(s)V(s) + k_T(s)N(\gamma(s))$$

d'où
$$\langle T'(s), V(s)\rangle = -k_g(\bar\gamma)(s)$$
Soit $n_{\bar\gamma}$ la normale principale de $\bar\gamma$. On a $T'(s) = k_{\bar\gamma}(s) n_{\bar\gamma}(s)$. Au bilan
$$k_{\bar\gamma}(s)\langle n_{\bar\gamma}(s), V(s)\rangle = -k_g(\bar\gamma)(s)$$
Notons que
$$\langle n_{\bar\gamma}(s), V(s)\rangle = \langle T(s)\wedge n_{\bar\gamma}(s), T(s)\wedge V(s)\rangle = \langle b_{\bar\gamma}(s), N(\gamma(s))\rangle$$
où $b_{\bar\gamma}$ est la binormale de $\bar\gamma$. Finalement
$$k_{\bar\gamma}(s)|\cos\theta(s)| = |k_g(\bar\gamma)(s)| = k_\delta(s).$$

7) Soit $w : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe telle que
$$\forall u \in [0, L],\quad \|w(u)\| = 1,\quad w'(u) \neq 0 \quad \text{et} \quad det(\alpha'(u), w(u), w'(u)) = 0.$$
On considère la surface réglée définie par
$$\begin{array}{rccc} g: & [0, L]\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & \alpha(u) + vw(u). \end{array}$$
Une telle surface est dite *développable*.
i) Montrer qu'il existe une unique courbe de la forme
$$\begin{array}{rccc} \beta: & [0, L] & \longrightarrow & [0, L]\times\mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & (t, \lambda(t)) \end{array}$$
telle que pour tout $t \in [0, L]$, $\langle \bar\beta'(t), w'(t)\rangle = 0$ où $\bar\beta = g\circ\beta$. Cette courbe est dite *arête de rebroussement*.
ii) Montrer que les génératrices $\Delta_u = \{\alpha(u) + vw(u) \mid v \in \mathbb{R}\}$ sont les droites tangentes de $\bar\beta$.
iii) Reconnaître $\bar\beta$ dans le cas où $w = \alpha'$.

Rép.– i) Pour tout $t \in [0, L]$, on a $\bar\beta(t) = \alpha(t) + \lambda(t)w(t)$ d'où
$$\langle \bar\beta'(t), w'(t)\rangle = \langle \alpha'(t) + \lambda'(t)w(t) + \lambda(t)w'(t), w'(t)\rangle = \langle \alpha'(t), w'(t)\rangle + \lambda(t)\langle w'(t), w'(t)\rangle$$
car $\|w(t)\|^2 = 1 \Longrightarrow \langle w(t), w'(t)\rangle = 0$. Il suffit donc de poser
$$\lambda(t) := -\frac{\langle \alpha'(t), w'(t)\rangle}{\langle w'(t), w'(t)\rangle} \quad (*)$$

pour obtenir une courbe $\bar{\beta}$ telle que $\langle \bar{\beta}'(t), w'(t)\rangle = 0$ pour tout $t \in [0, L]$. Cette courbe est unique car déterminée par la relation $(*)$.
ii) D'une part, on a $\bar{\beta}'(t) = \alpha'(t)+\lambda'(t)w(t)+\lambda(t)w'(t) \in Vect(w(t), w'(t))$ car la condition $det(\alpha'(t), w(t), w'(t)) = 0$ implique que $\alpha'(t)$ est une combinaison linéaire de $w(t)$ et de $w'(t)$. Par définition de $\bar{\beta}$ on a aussi $\langle \bar{\beta}'(t), w'(t)\rangle = 0$, donc $\bar{\beta}'(t)$ est proportionnel à $w(t)$. La droite tangente $T_t\bar{\beta}$ à $\bar{\beta}$ en t est donc parallèle à la génératrice Δ_t. D'autre part $\bar{\beta}(t)$ est un point de Δ_t, celui donné en prenant $v = \lambda(t)$ dans la formule de définition de Δ_t. Ainsi $T_t\bar{\beta} = \Delta_t$.
iii) La courbe $\bar{\beta}$ est la courbe α puisque dans ce cas

$$\lambda(t) := -\frac{\langle \alpha'(t), w'(t)\rangle}{\langle w'(t), w'(t)\rangle} = -\frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t)\rangle}{\langle \alpha''(t), \alpha''(t)\rangle} = 0$$

et donc

$$\bar{\beta}(t) = g \circ \beta(t) = g(t, 0) = \alpha(t).$$

SI LE SUJET PARAIT TROP COURT, ON PEUT RAJOUTER UNE QUESTION SUR L'HELICOIDE DEVELOPPABLE ET FAIRE MONTRER QUE LES LIGNES DE COURBURE SONT LES GENERATRICES ET LES LIGNES DE NIVEAU.