Université Claude Bernard Lyon 1

M1G – Géométrie : Courbes et surfaces

Examen final du 6 janvier 2017 - Durée 2h

Les documents sont autorisés mais les calculettes et les portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Soient S une sous-variété de dimension deux, n un champ de vecteurs normaux unitaires et $\gamma : I \longrightarrow S$ une ligne de courbure birégulière. On suppose que le support de γ est contenu dans un plan. Alors l'angle entre la normale principale de γ et n est constant le long de la courbe.

2.– Même énoncé en remplaçant "ligne de courbure" par "géodésique".

3.– Même énoncé en remplaçant par "courbe asymptotique".

4.– Soit $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $(u, v) \longmapsto (x(u), y(u), v)$ où $u \mapsto (x(u), y(u))$ est une courbe birégulière γ paramétrée par la longueur d'arc. La courbure de Gauss de f est égale à la courbure algébrique de γ.

5.– Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ la sous-variété de dimension deux définie par $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - x^2 = 0\}$. Sa courbure de Gauss est nulle en tout point.

6.– Pour toute courbe $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ birégulière paramétrée par la longueur d'arc on définit $f_\gamma : I \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ par

$$f_\gamma(u, v) = \gamma(u) + \cos v \; N(u) + \sin v \; B(u)$$

où N est la normale principale de γ et B sa binormale. On suppose que $\gamma_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $\gamma_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sont birégulière paramétrée par la longueur d'arc avec une courbure principale plus petite que 1. Alors f_{γ_1} et f_{γ_2} sont isométriques.

7.– On garde les hypothèses de la question 6. Alors $Aire(f_{\gamma_1}) = Aire(f_{\gamma_2})$.

8.– En tout point non ombilical d'une surface minimale les tangentes aux lignes de courbures sont les bissectrices des tangentes aux lignes asymptotiques.

9.– L'ensemble $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 - (y + z)^3 = 0\}$ est une sous-variété de dimension deux de $\mathbb{R}^3$.

10.– Soit S la sous-variété définie par $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^4 + y^6 + z^8 = 1\}$. Il existe un point $p \in S$ où le vecteur $(0, 0, 1)$ est un vecteur directeur de la droite normale à S en p.

Problème. – On note $\mathbb{S}^2(r)$ la sphère de rayon r et de centre l'origine de $\mathbb{R}^3$. On suppose que $\mathbb{S}^2(r)$ est orientée par la normale sortante. Le but de ce problème est de montrer qu'il n'existe pas de champ de vecteurs tangents à $\mathbb{S}^2(r)$ partout non nul.

1) On pose $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ et on note

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{S}^2(r) \subset \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v)) \end{array}$$

une paramétrisation régulière d'une portion de $\mathbb{S}^2(r)$ qui préserve l'orientation.

i) Montrer que $f^*(xdy \wedge dz) = f_1 df_2 \wedge df_3$.

ii) Montrer ensuite que

$$f^*(xdy \wedge dz) = f_1 \left(\frac{\partial f_2}{\partial u} \frac{\partial f_3}{\partial v} - \frac{\partial f_3}{\partial u} \frac{\partial f_2}{\partial v} \right) du \wedge dv$$

iii) En déduire que

$$f^*\omega = \langle f, f_u \wedge f_v \rangle du \wedge dv$$

iv) Montrer que

$$f^*\omega = r \| f_u \wedge f_v \| du \wedge dv$$

(on prendra soin des questions d'orientation).

v) Montrer que

$$\int_{\mathbb{S}^2(r)} \omega = 4\pi r^3.$$

2) On rappelle qu'un champ de vecteurs tangents sur la sphère unité s'identifie à une application $Z : \mathbb{S}^2(1) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ C^∞ telle que pour tout $p \in \mathbb{S}^2(1)$, $\langle p, Z(p)\rangle = 0$. On suppose qu'il existe un champ de vecteurs tangents Z *unitaire* sur la sphère c'est-à-dire tel que pour $p \in \mathbb{S}^2(1)$, $\|Z(p)\| = 1$ et on définit

$$\begin{array}{rccc} W : & \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & p & \longmapsto & Z\left(\dfrac{p}{\|p\|}\right) \end{array}$$

Montrer que pour tout $r > 0$, la restriction du champ de vecteurs W à $\mathbb{S}^2(r)$ est un champ de vecteurs tangents à $\mathbb{S}^2(r)$ et unitaire.

3) Soient $\epsilon > 0$ et $0 < r_1 < 1 < r_2$. On pose

$$\begin{array}{rccc} \psi_\epsilon : & C(r_1, r_2) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & p & \longmapsto & p + \epsilon W(p). \end{array}$$

où $C(r_1, r_2) = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid r_1 < \|p\| < r_2\}$.

i) Soit $r \in]r_1, r_2[$. Montrer que l'image de $\mathbb{S}^2(r)$ par ψ_ϵ est incluse dans une sphère dont on déterminera le rayon.

ii) On suppose que $\psi_\epsilon(p) = \psi_\epsilon(q)$ avec $p \neq q$. Montrer que $\|p\| = \|q\|$.

iii) Sous les mêmes hypothèses que le *ii*, montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que

$$1 \leq \epsilon \|dW\|$$

où $\|dW\| = \sup_{p \in C(r_1, r_2)} \|dW_p\|$ et $\|dW_p\| = \sup_{\|V\|=1} \|dW_p(V)\|$.

iv) Montrer que si $\epsilon > 0$ est suffisamment petit alors ψ_ϵ est injective (on raisonnera par l'absurde en supposant qu'il existe une suite $(\epsilon_k)_k$ tendant vers 0 pour laquelle chaque ψ_{ϵ_k} n'est pas injectif).

v) Montrer que pour tout $V \in \mathbb{R}^3$ et tout $p \in C(r_1, r_2)$ on a

$$\|(d\psi_\epsilon)_p(V)\| \leq (1 - \epsilon\|dW\|)\|V\|.$$

vi) Montrer que si $\epsilon > 0$ est suffisamment petit ψ_ϵ est un difféomorphisme global sur son image.

4) i) Soient $\epsilon > 0$, α et β deux 1-formes différentielles sur $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ et g et h deux applications de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{U}$. Montrer que

$$(g + \epsilon h)^*(\alpha \wedge \beta) = g^*(\alpha \wedge \beta) + \epsilon\left(g^*\alpha \wedge h^*\beta + h^*\alpha \wedge g^*\beta\right) + \epsilon^2 h^*(\alpha \wedge \beta)$$

ii) En déduire que

$$\psi_\epsilon^*\omega = \omega + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2$$

où ω est la 2-forme définie en début de problème et ω_1 et ω_2 sont des 2-formes indépendantes de ϵ qu'on ne cherchera pas à déterminer.
iii) Montrer que

$$\int_{\mathbb{S}^2(1)} \psi_\epsilon^*\omega = 4\pi + A_1\epsilon + A_2\epsilon^2$$

où A_1 et A_2 sont des constantes que l'on ne cherchera pas à déterminer.

5) On choisit $\epsilon > 0$ tel que ψ_ϵ soit un difféomorphisme sur son image. On admet que $\psi_\epsilon(\mathbb{S}^2(1)) = \mathbb{S}^2(\sqrt{1+\epsilon^2})$. Ainsi

$$\int_{\mathbb{S}^2(\sqrt{1+\epsilon^2})} \omega = \pm \int_{\mathbb{S}^2(1)} \psi_\epsilon^*\omega$$

selon que ψ_ϵ conserve ou non les orientations.
i) En s'appuyant sur les résultats des questions 1.v et 4.iii, montrer que l'on aboutit à une contradiction.
ii) En déduire qu'il n'existe pas de champ de vecteurs tangents partout non nul sur la sphère unité [1].

6) Soit $P : \mathbb{R}^3 \setminus \{z = -1\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ le champ de vecteurs défini par

$$P(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\dfrac{xy}{1+z} \\ (1 - \dfrac{y^2}{1+z}) \\ -y \end{pmatrix}$$

i) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{z = -1\}$ et tel que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Montrer que $P(x,y,z)$ est dans le plan tangent $T_{(x,y,z)}\mathbb{S}^2(1)$.
ii) Soit (x,y,z) comme dans la question précédente. Montrer que $P(x,y,z)$ est unitaire.
iii) Pourquoi les résultats de i et ii ne sont-ils pas contradictoires avec celui du 5.ii ?

1. Ce résultat est connu sous le nom de *Théorème de la sphère chevelue*. La démonstration proposée dans ce problème est due à John Milnor et date de 1978.