

Université Claude Bernard Lyon 1
M1R – Géométrie : Courbes et surfaces
Corrigé du contrôle partiel
Jeudi 28 Octobre 2010? - Durée 2 heures

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Il n'existe pas de courbe paramétrée de classe C^1 dont le support soit $\Gamma = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}_+\} \cup \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}_+\}$.

2.– Si une courbe paramétrée n'a pas de point d'inflexion alors elle est birégulière.

3.– Soient $O = (0, 0)$ et $A = (2, 0)$ deux points du plan et $P = [O, A] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Alors, il existe une courbe plane birégulière à courbure constante ≥ 1 joignant O et A et dont le support est contenu dans P .

4.– Soient $O = (0, 0, 0)$ et $A = (2, 0, 0)$ deux points de l'espace et $P = [O, A] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Alors, il existe une courbe de l'espace birégulière à courbure constante ≥ 1 joignant O et A et dont le support est contenu dans P .

5.– Soit $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$. L'aire du domaine délimité par γ vaut $\frac{3\pi}{8}$.

6.– Soit $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe plane birégulière fermée. Si le support de γ est un cercle alors l'indice de rotation de γ vaut ± 1 .

7.– Soit α une 2-forme à support compact de \mathbb{R}^2 . Si β est une 1-forme de \mathbb{R}^2 telle que $\alpha = d\beta$ alors β est à support compact.

8.– Soit $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple C^2 et r une réflexion quelconque du plan, alors $Ind(r \circ \gamma) = -Ind(\gamma)$.

9.– Soit $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple C^2 paramétrée par la l.a. alors

$$\int_0^{2\pi} k(s) ds \geq 2\pi.$$

10.– Le support de la courbe $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (\cos(\cos t), \sin(\cos(t)), \cos(t))$ est inclu dans une sphère.

Exercice. – Soit $\rho : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe polaire donnée par $\rho(\theta) = \cos^3 \theta$.

- 1) Déterminer les points réguliers de ρ et tracer sommairement son support.
- 2) Déterminer la courbure de ρ .
- 3) Calculer l'aire enclose par ρ . Pour les besoins du calcul, on rappelle que

$$\cos^6 \theta = \frac{5}{16} + \frac{15}{32} \cos 2\theta + \frac{3}{16} \cos 4\theta + \frac{1}{32} \cos 6\theta.$$

Problème. – Soient $(D_t)_{t \in \mathbb{R}}$ la famille de droites d'équation

$$x \cos t + y \sin t = h(t)$$

où $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est C^∞ et 2π -périodique.

- 1) Déterminer la courbe enveloppe γ . A quelle condition sur h cette courbe est-elle régulière ?
- 2) Décrire γ dans les cas où :
 - a) h est constante non nulle,
 - b) h est la fonction \cos ,
 - c) h est la fonction $1 + \cos t$.
- 3) Montrer que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ est un point double ssi la rotation d'angle $t_1 - t_2$ envoie le vecteur $(h(t_1), h'(t_1))$ sur le vecteur $(h(t_2), h'(t_2))$.

4) On suppose désormais que h est telle que γ est régulière et que $\gamma|_{[0,2\pi[}$ est sans point double. Montrer que $\gamma|_{[0,2\pi]}$ est fermée et que son support sépare \mathbb{R}^2 en deux composantes connexes, une bornée et l'autre non.

5) On note $\bar{\gamma}$ pour $\gamma|_{[0,2\pi]}$. Montrer que la longueur de $\bar{\gamma}$ ne dépend que de la valeur moyenne \bar{h} de h .

6) On suppose que $\bar{\gamma}$ borde positivement sa composante bornée. Montrer l'aire de cette composante ne dépend que de \bar{h} et des variances $Var(h)$ et $Var(h')$ de h et h' .

7) En appliquant l'inégalité de Wirtinger, retrouver l'inégalité isopérimétrique pour les courbes $\bar{\gamma}$.