Université Claude Bernard Lyon 1

M1R – Géométrie : Courbes et surfaces

Corrigé du contrôl partiel

Jeudi 28 Octobre 2010 ? - Durée 2 heures

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Il n'existe pas de courbe paramétrée de classe C^1 dont le support soit $\Gamma = \{(0,y)\ |y \in \mathbb{R}_+\} \cup \{(x,0)\ |x \in \mathbb{R}_+\}$.

Rép.– Faux, choisir $\gamma(t) = (0,t^2)$ si $t \leq 0$ et $\gamma(t) = (t^2,0)$ si $t > 0$.

2.– Si une courbe paramétrée n'a pas de point d'inflexion alors elle est birégulière.

Rép.– Faux, la courbure algébrique peut s'annuler sans changer de signe

3.– Soient $O = (0,0)$ et $A = (2,0)$ deux points du plan et $P = [O,A] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Alors, il existe une courbe plane birégulière à courbure constante ≥ 1 joignant O et A et dont le support est contenu dans P.

Rép.– Faux, les supports des courbes planes birégulières à courbure constante sont des arcs de cercles. Puisque la courbure est ≥ 1, le support contient nécessairement un demi-cercle de rayon 1 centré en $(1,0)$. Ce support n'est pas contenu dans P.

4.– Soient $O = (0,0,0)$ et $A = (2,0,0)$ deux points de l'espace et $P = [O,A] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Alors, il existe une courbe de l'espace birégulière à courbure constante ≥ 1 joignant O et A et dont le support est contenu dans P.

Rép.– Vrai, une hélice de rayon $\frac{1}{2}$ ayant suffisamment de spirales convient. En effet dans ce cas, $\tau \approx 0$ et $k \approx 2$.

5.– Soit $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$. L'aire du domaine délimité par γ vaut $\dfrac{3\pi}{8}$.

Rép.– Vrai, appliquer la formule de Green-Riemann pour le vérifier.

6.– Soit $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe plane birégulière fermée. Si le support de γ est un cercle alors l'indice de rotation de γ vaut ± 1.

Rép.– Faux, γ peut parcourir plusieurs fois son support...

7.– Soit α une 2-forme à support compact de $\mathbb{R}^2$. Si β est une 1-forme de $\mathbb{R}^2$ telle que $\alpha = d\beta$ alors β est à support compact.

Rép.– Faux. Supposons β à support compact et soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors $\beta_1 = \beta + df$ est une primitive de α et il est facile de choisir f telle que β_1 ne soit pas à support compact, par exemple $f(x, y) = x^2 + y^2$.

8.– Soit $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple C^2 et r une réflexion quelconque du plan, alors $Ind(r \circ \gamma) = -Ind(\gamma)$.

Rép.– Vrai, une réflexion change le sens des bases donc $k_{alg}(r \circ \gamma) = -k_{alg}(\gamma)$ et la formule $Ind(\gamma) = -\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} k_{alg}(t) \|\gamma'(t)\| dt$ permet de conclure.

9.– Soit $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple C^2 paramétrée par la l.a. alors

$$\int_0^{2\pi} k(s) ds \geq 2\pi.$$

Rép.– Vrai, on a

$$2\pi = \left| \int_0^{2\pi} k_{alg}(s) ds \right| \leq \int_0^{2\pi} |k_{alg}(s)| ds = \int_0^{2\pi} k(s) ds.$$

10.– Le support de la courbe $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $t \longmapsto (\cos(\cos t), \sin(\cos(t)), \cos(t))$ est inclu dans une sphère.

Rép.– Faux, le support de γ est celui d'une hélice circulaire.

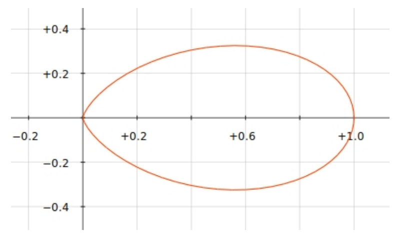
Exercice. – Soit $\rho : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe polaire donnée par $\rho(\theta) = \cos^3\theta$.

1) Déterminer les points réguliers de ρ et tracer sommairement son support.

Rép.– On a

$$\rho^2 + \rho'^2 = \cos^6\theta + 9\sin^2\theta\cos^4\theta = \cos^4\theta\left(\cos^2\theta + 9\sin^2\theta\right) = \cos^4\theta\left(1 + 8\sin^2\theta\right).$$

Donc tous les points sont réguliers sauf celui correspondant à $\theta = \frac{\pi}{2}$.



2) Déterminer la courbure de ρ.

Rép.– Un calcul direct montre que

$$k(\theta) = \frac{\cos^3\theta(1 + 8\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{8(1 + 2\sin^2\theta)}$$

3) Calculer l'aire enclose par ρ. Pour les besoins du calcul, on rappelle que

$$\cos^6\theta = \frac{5}{16} + \frac{15}{32}\cos 2\theta + \frac{3}{16}\cos 4\theta + \frac{1}{32}\cos 6\theta.$$

Rép.– L'application de la formule de Green-Riemann donne

$$Aire = \frac{1}{2}\int_0^\pi \rho^2 d\theta = \frac{5}{32}\pi.$$

Problème. – Soient $(D_t)_{t\in\mathbb{R}}$ la famille de droites d'équation

$$x\cos t + y\sin t = h(t)$$

où $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est C^∞ et 2π-périodique.

1) Déterminer la courbe enveloppe γ. A quelle condition sur h cette courbe est-elle régulière ?

Rép.– Avec les formules du cours, on trouve immédiatement

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & h(t)\cos t - h'(t)\sin t \\ y(t) & = & h(t)\sin t + h'(t)\cos t \end{array} \right.$$

puis

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & (h(t)+h''(t))\sin t \\ y'(t) & = & (h(t)+h''(t))\cos t \end{array} \right.$$

Donc γ est régulière ssi, pour tout $t \in [0, 2\pi[$, $h(t) + h''(t) \neq 0$.

2) Décrire γ dans les cas où :
a) h est constante non nulle,
b) h est la fonction cos,
c) h est la fonction $1 + \cos t$.

Rép.– Si h est constante, γ a pour support un cercle de rayon $|h|$. Si $h = \cos$ alors le support de γ est le point $(1, 0)$. Si $h(t) = 1 + \cos t$ alors le support de γ est un cercle de rayon 1 et de centre $(1, 0)$.

3) Montrer que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ est un point double ssi la rotation d'angle $t_1 - t_2$ envoie le vecteur $(h(t_1), h'(t_1))$ sur le vecteur $(h(t_2), h'(t_2))$.

Rép.– Il suffit de remarquer que

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(t) \\ h'(t) \end{pmatrix} = R_t \begin{pmatrix} h(t) \\ h'(t) \end{pmatrix}$$

4) On suppose désormais que h est telle que γ est régulière et que $\gamma_{|[0,2\pi[}$ est sans point double. Montrer que $\gamma_{|[0,2\pi]}$ est fermée et que son support sépare $\mathbb{R}^2$ en deux composantes connexes, une bornée et l'autre non.

Rép.– Puisque h est 2π-périodique, l'expression de γ obtenue en 1 montre qu'elle est fermée. D'après les hypothèses de la question $\gamma_{|[0,2\pi]}$ est simple, on peut donc appliquer le théorème de Jordan.

5) On note $\overline{\gamma}$ pour $\gamma_{|[0,2\pi]}$. Montrer que la longueur de $\overline{\gamma}$ ne dépend que de la valeur moyenne $\overline{h}$ de h.

Rép.– On a $\|\overline{\gamma}'(t)\| = |h(t) + h''(t)|$. Remarquons que $t \longmapsto h(t) + h''(t)$ ne change pas de signe puisque $\overline{\gamma}$ est régulière. Soit $\epsilon = sign(h(t) + h''(t))$, on a donc

$$\forall t \in [0, 2\pi], \quad \|\overline{\gamma}'(t)\| = \epsilon(h(t) + h''(t)).$$

D'où

$$Long(\overline{\gamma}) = \int_0^{2\pi} \|\overline{\gamma}'(t)\|dt = \epsilon \int_0^{2\pi} (h(t) + h''(t))dt = \epsilon \int_0^{2\pi} h(t)dt = \epsilon 2\pi \overline{h}$$

car

$$\int_0^{2\pi} h''(t)dt = [h'(t)]_0^{2\pi} = 0.$$

6) On suppose que $\overline{\gamma}$ borde positivement sa composante bornée. Montrer l'aire de cette composante ne dépend que de $\overline{h}$ et des variances $Var(h)$ et $Var(h')$ de h et h'.

Rép.– On calcule l'aire enclose au moyen de la formule de Green-Riemann. On a :

$$Aire(\overline{\gamma}) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} xy' - yx' = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (h + h'')hdt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (h^2 - h'^2)dt.$$

Or

$$h^2 = (h - \overline{h} + \overline{h})^2 = (h - \overline{h})^2 + 2(h - \overline{h})\overline{h} + \overline{h}^2$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} h^2 dt = \int_0^{2\pi} (h - \overline{h})^2 dt + \int_0^{2\pi} \overline{h}^2 dt = 2\pi Var(h) + 2\pi \overline{h}^2.$$

D'autre part, puisque la moyenne de h' est nulle, on a

$$Var(h') = 2\pi \int_0^{2\pi} h'^2 dt.$$

Au bilan,

$$Aire(\overline{\gamma}) = \pi \left(Var(h) - Var(h') + \overline{h}^2 \right).$$

7) En appliquant l'inégalité de Wirtinger, retrouver l'inégalité isopérimétrique pour les courbes $\overline{\gamma}$.

Rép.– L'inégalité de Wirtinger affirme que $Var(h') \geq Var(h)$, par conséquent

$$Aire(\overline{\gamma}) = \pi \left(Var(h) - Var(h') + \overline{h}^2 \right) \leq \pi \overline{h}^2.$$

Or

$$Long(\overline{\gamma})^2 = 4\pi^2 \overline{h}^2$$

d'où

$$Long(\overline{\gamma})^2 \geq 4\pi Aire(\overline{\gamma}).$$