Université Claude Bernard Lyon 1

M1 – Géométrie : Courbes et surfaces

Jeudi 24 novembre 2011 - Durée 2 heures

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Il n'existe pas de courbe polaire $\theta \longmapsto r(\theta)$ (régulière ou non) dont le support soit le carré $[0,1]\times\{0\}\cup[0,1]\times\{1\}\cup\{0\}\times[0,1]\cup\{1\}\times[0,1]$.

2.– La courbe polaire $r(\theta) = \dfrac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}$ où $\theta \in \,]0,\pi[$ a pour support une parabole.

3.– Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière admettant une droite bitangente D (i.e. il existe deux points distincts $p, q \in \Gamma = \gamma(I)$ tels que D soit tangente en p et en q). On note h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par $h(x,y,z) = (100x, 10y+10, z+100)$. Alors la courbe $h\circ\gamma$ admet une droite bitangente.

4.– Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière. On note $\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2\times\{0\}$ la projection orthogonale sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que la courbe $\pi\circ\gamma$ est régulière et admet une droite bitangente. Alors γ admet une droite bitangente.

5.– L'aire de $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x^2\}$ vaut $\frac{2}{3}$.

6.– Soit $\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe plane birégulière fermée. Si $Ind(\gamma) = 2$ alors le support Γ de γ sépare $\mathbb{R}^2$ en trois composantes connexes au moins.

7.– Soit $\gamma : [0,2\pi] \xrightarrow{C^1} \mathbb{C}^*$ régulière et fermée et soit $h : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ donnée par $h(z) = z^2$. Alors le nombre de tours de $h\circ\gamma$ par rapport à l'origine O

vaut $N(\gamma, O) + 2$.

8.– Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe une courbe fermée birégulière γ_n telle que $Ind(\gamma_n) = n$.

9.– Soient γ_1 et γ_2 deux courbes régulières fermées. Si $\gamma_1 + \gamma_2$ est régulière alors $Ind(\gamma_1 + \gamma_2) = Ind(\gamma_1) + Ind(\gamma_2)$.

10.– Il n'existe pas de courbe birégulière fermée dans $\mathbb{R}^3$ qui soit à courbure et à torsion (non nulle) constantes.

Problème. – Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés de la *néphroïde* :

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & a \begin{pmatrix} 3\cos t - \cos 3t \\ 3\sin t - \sin 3t \end{pmatrix} \end{array}$$

où $a > 0$.

1) Déterminer les points réguliers de γ.

2) Montrer que le support Γ de γ est symétrique par rapport à l'axe (Ox) et par rapport à l'axe (Oy). Tracer sommairement Γ.

3) Déterminer la longueur et l'aire enclose par γ

4) Montrer que, en les points réguliers, la courbure principale k de γ est, à un cœfficient près, inversement proportionnel à la vitesse $\|\gamma'\|$ de γ.

5) En tout point régulier t de γ, on pose $N(t) := \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}(-y'(t), x'(t))$. Déterminer, en les points réguliers, la développée $\beta := \gamma + \frac{1}{k}N$ de γ. Comparer $\gamma\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ avec $\beta(t)$. En déduire que l'on passe du support de γ à celui de β au moyen d'une similitude directe dont on précisera l'angle et le rapport.

6) Soient C le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ et $p \in C$. On note $\Delta_p := p + p\mathbb{R}$ la droite normale à C passant par p. On note également D_p l'image de la droite horizontale passant par le point p par la réflexion d'axe Δ_p. Montrer que la

courbe enveloppe de la famille de droites $(D_p)_{p\in C}$ est une néphroïde.

7) On identifie $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$. On considère deux points

$$M_1(t) = e^{i\omega_1 t} \quad \text{et} \quad M_2(t) = e^{i\omega_2 t}$$

parcourant le cercle C avec des vitesses angulaires ω_1 et ω_2. On suppose que $\omega_1+\omega_2 \neq 0$ et on note $G(t)$ le barycentre du système $\{(M_1(t), \omega_2), (M_2(t), \omega_1)\}$. Montrer que $G'(t)$ est colinéaire à $\overrightarrow{M_1(t)M_2(t)}$.

8) On choisit $\omega_2 = 3$ et $\omega_1 = 1$. Déduire de la question précédente que l'enveloppe des droites $(M_1(t)M_2(t))_{t\in[0,2\pi]}$ est une néphroïde.

Note.– On rappelle quelques formules trigonométriques :

$$\begin{aligned}
\sin A \sin B &= \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B)) \\
\cos A \cos B &= \frac{1}{2}(\cos(A-B) + \cos(A+B)) \\
\sin A \cos B &= \frac{1}{2}(\sin(A-B) + \sin(A+B)).
\end{aligned}$$