Université Claude Bernard Lyon 1

M1 – Géométrie : Courbes et surfaces

Contrôle partiel du 13 novembre 2013 - durée 2h

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Soient $r : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une courbe polaire C^∞. Si r' et r'' ne s'annulent pas alors la courbe est birégulière.

2.– Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe ayant trois points alignés de même courbure. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définit par $(x, y) \longmapsto (x + 2y, -2x + y)$. Alors $\varphi \circ \gamma$ possède trois points alignés de même courbure.

3.– L'enveloppe de la famille de droites d'équation $\frac{x}{\cos t} + \frac{y}{\sin t} = 1$, $t \in]0, \pi/2[$, est une portion de l'astroïde $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

4.– Soit $\gamma(t) = (t^3 - t, 1 - t^2)$ avec $t \in [-1, 1]$. L'aire enclose par γ vaut $8/15$.

5.– Soit $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple régulière d'indice de rotation nul. Alors γ n'est pas birégulière.

6.– Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple birégulière et paramétrée par la longueur d'arc. Alors la formule de l'indice de rotation implique que la longueur $Long(\gamma')$ de γ' est un multiple de 2π.

7.– Soient $R > 0$, α une 1-forme de $\mathbb{R}^2$ telle que $\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ et $\gamma_R : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée donnée par $\gamma_R(\theta) = (R\cos\theta, R\sin\theta)$. Alors on a

$$\int_{\gamma_R} \alpha = R \int_{\gamma_1} \alpha.$$

8.– Soient $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto \gamma(t)$ une courbe paramétrée plane. Si

$\gamma^* dx = dt$ alors γ est paramétrée par la longueur d'arc.

9.– Soit $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée donnée par $x(t) = e^t + 1$ et $y(t) = e^t$. Alors le support de γ est une droite.

10.– Soit $\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe régulière fermée simple paramétrée par la longueur d'arc, Γ_1 son support et C_{int} la composante bornée du complémentaire de Γ_1. Soit $\gamma_2 : [0,1] \longrightarrow C_{int}$ une autre courbe régulière fermée simple paramétrée par la longueur d'arc, alors on a

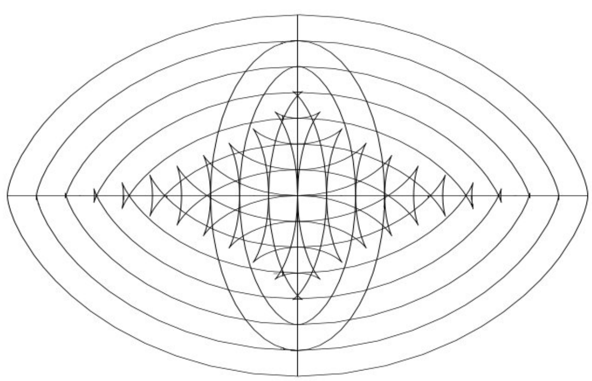
$$\left|\int_0^1 k_{1,alg}(s)ds\right| < \left|\int_0^1 k_{2,alg}(s)ds\right|$$

où $k_{1,alg}$ et $k_{2,alg}$ sont les courbures algébriques de γ_1 et γ_2.

Problème. – Soit $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe birégulière paramétrée par la longueur d'arc. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la courbe paramétrée

$$\begin{array}{rccl} \gamma_a : & [\alpha,\beta] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) + aN_{alg}(t) \end{array}$$

où N_{alg} est la normale algébrique de γ, est dite *courbe parallèle* à γ. Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés des courbes parallèles.



Courbes parallèles à une ellipse.

1) Montrer que les image des points singuliers de la famille de courbes $(\gamma_a)_{a\in\mathbb{R}}$ forment le support de la développée de γ (on rappelle que la courbe

développée est la courbe des centres de courbure).

2) Calculer la longueur d'arc de γ_a et montrer que si $|a|$ est suffisamment petit alors

$$Long(\gamma_a) + Long(\gamma_{-a}) = 2Long(\gamma).$$

3) Montrer que, si a est suffisamment petit, la normale algébrique $N_{a,alg}$ de γ_a est égale à la normale algébrique N_{alg} de γ. On prendra garde que si $a \neq 0$ la courbe γ_a n'est pas paramétrée par l'abscisse curviligne.

4) Déterminer le rayon de courbure R_a aux points réguliers de γ_a. On discutera selon que $k_{alg} = \pm k$.

5) Soit $a \neq 0$. Dans cette question on se place en un point t tel $k_{alg}(t) = a^{-1}$ et on suppose $k'_{alg}(t) \neq 0$. Montrer que t est un point de rebroussement de première espèce de γ_a.

6) Soit $(\delta_{t_0})_{t_0 \in \mathbb{R}}$ la famille des développantes de γ :

$$\forall\, t \in I = [\alpha, \beta], \quad \delta_{t_0}(t) := \gamma(t) - (t + t_0)\gamma'(t).$$

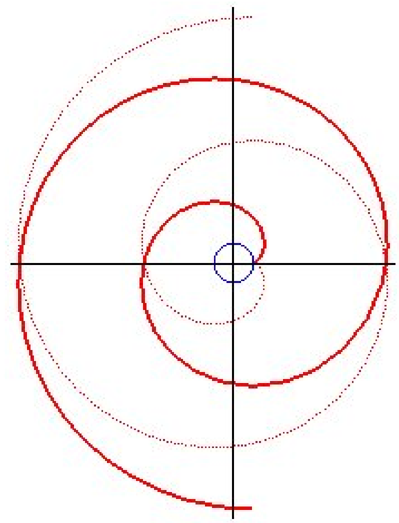
Montrer que pour tout couple $(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^2$ avec $-t_0 < \alpha$, $-t_1 < \alpha$, les développantes δ_{t_0} et δ_{t_1} sont parallèles.

7) Soient $R > 0$ et γ donnée par $\gamma(t) = (R\cos\dfrac{t}{R}, R\sin\dfrac{t}{R})$ avec $t \in \mathbb{R}$.

i) Ecrire les développantes $(\delta_{t_0})_{t_0 \in \mathbb{R}}$ de γ et montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad dist(\delta_{t_0}(t + 2\pi R), \delta_{t_0}(t)) = Cte.$$

ii) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\delta_{t_0}(t + 2\pi R) - \delta_{t_0}(t)$ est orthogonal à $\delta'_{t_0}(t)$ et à $\delta'_{t_0}(t + 2\pi R)$.



Une développante d'un cercle.

8) On dit qu'une courbe paramétrée $\delta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est *auto-parallèle* s'il existe un difféomorphisme $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que d'une part,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad dist(\delta(\varphi(t)), \delta(t)) = Cte$$

et d'autre part, $\delta'(\varphi(t))$ et $\delta'(t)$ sont orthogonaux à $\delta(\varphi(t)) - \delta(t)$. Montrer que si $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ paramétrée par la longueur d'arc est T-périodique alors toutes ses développantes δ_{t_0} sont des courbes auto-parallèles.