Université Claude Bernard Lyon 1

M1 – Géométrie : Courbes et surfaces

Corrigé du contrôle partiel du xx novembre 2013

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Soient $r : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une courbe polaire C^∞. Si r' et r'' ne s'annulent pas alors la courbe est birégulière.

Rép.– Faux. Si $\gamma(\theta) = re^{i\theta}$ alors $k_{alg} = \dfrac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{(r^2 + (r')^2)^{\frac{3}{2}}}$. La non annulation de r' et de r'' n'implique pas $k_{alg} \neq 0$.

2.– Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe ayant trois points alignés de même courbure. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définit par $(x, y) \longmapsto (x + 2y, 3x + 4y)$. Alors $\varphi \circ \gamma$ possède trois points alignés de même courbure.

Rép.– Vrai. L'application φ est linéaire, elle préserve l'alignement, l'égalité des vitesses et des accélérations, donc l'égalité de la courbure aussi.

3.– L'enveloppe de la famille de droites d'équation $\frac{x}{\cos t} + \frac{y}{\sin t} = 1$, $t \in]0, \pi/2[$, est une portion de l'astroïde $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

Rép.– Vrai, le vérifier avec les formules du cours.

4.– Soit $\gamma(t) = (t^3 - t, 1 - t^2)$ avec $t \in [-1, 1]$. L'aire enclose par γ vaut $8/15$.

Rép.– Vrai, appliquer la formule de Green-Riemann pour le vérifier.

5.– Soit $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple régulière d'indice de rotation nul. Alors γ n'est pas birégulière.

Rép.– Vrai. La formule $Ind(\gamma) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} k_{alg}(t)\|\gamma'(t)\|dt$ montre qu'il existe nécessairement un point t où k_{alg} s'annule. En ce point γ n'est pas birégulière.

6.– Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple birégulière et paramétrée par la longueur d'arc. Alors la formule de l'indice de rotation implique que la longueur $Long(\gamma')$ de γ' est un multiple de 2π.

Rép.– Vrai. Puisque γ est paramétrée par la longueur d'arc on a

$$Ind(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_I k_{alg}(s)\|\gamma'(s)\|ds = \frac{1}{2\pi}\int_I k_{alg}(s)ds.$$

Comme γ est birégulière, k_{alg} ne change pas de signe et donc

$$Ind(\gamma) = \pm\frac{1}{2\pi}\int_I \|\gamma''(s)\|ds = \pm\frac{1}{2\pi}Long(\gamma')$$

on déduit

$$Long(\gamma') = \pm 2Ind(\gamma)\pi \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

7.– Soient $R > 0$, α une 1-forme de $\mathbb{R}^2$ telle que $\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ et $\gamma_R : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée donnée par $\gamma_R(\theta) = (R\cos\theta, R\sin\theta)$. Alors on a

$$\int_{\gamma_R} \alpha = R\int_{\gamma_1} \alpha.$$

Rép.– Faux, d'après la formule de Green-Riemann on a

$$\int_{\gamma_R} \alpha = \int_{D_R} \mathrm{d}\alpha = \int_{D_R} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \pi R^2$$

où D_R est le disque de rayon R. Ainsi $\int_{\gamma_R} \alpha = R^2 \int_{\gamma_1} \alpha$.

8.– Soient $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto \gamma(t)$ une courbe paramétrée plane. Si $\gamma^*dx = dt$ alors γ est paramétrée par la longueur d'arc.

Rép.– Faux. Si $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ alors $\gamma^*dx = \gamma_1'(t)dt$. Toute courbe $\gamma(t) = (t, f(t))$ vérifie $\gamma^*dx = dt$.

9.– Soit $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée donnée par $x(t) = e^t + 1$ et $y(t) = e^t$. Alors le support de γ est une droite.

Rép.– Faux, le support est une demi-droite ouverte.

10.– Soit $\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe régulière fermée simple paramétrée par la longueur d'arc, Γ_1 son support et C_{int} la composante bornée du complémentaire de Γ_1. Soit $\gamma_2 : [0,1] \longrightarrow C_{int}$ une autre courbe régulière fermée simple paramétrée par la longueur d'arc, alors on a

$$\left| \int_0^1 k_{1,alg}(s)ds \right| < \left| \int_0^1 k_{2,alg}(s)ds \right|$$

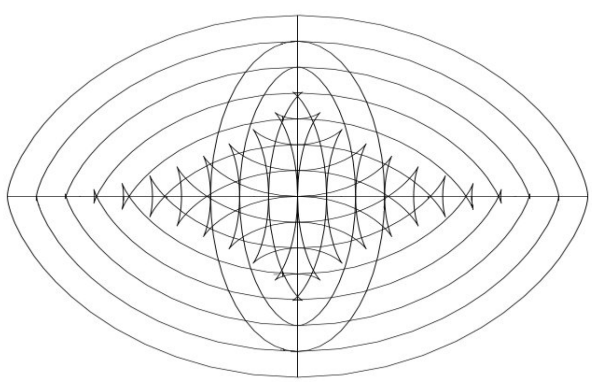
où $k_{1,alg}$ et $k_{2,alg}$ sont les courbures algébriques de γ_1 et γ_2.

Rép.– Faux. En effet $\int_0^1 k_{1,alg}(s)ds = 2\pi Ind(\gamma_1)$ et $\int_0^1 k_{2,alg}(s)ds = 2\pi Ind(\gamma_1)$, l'inégalité proposée s'écrit $|Ind(\gamma_1)| < |Ind(\gamma_2)|$. Il suffit de choisir γ_2 de même indice que γ_1 pour la faire échouer.

Problème. – Soit $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe birégulière paramétrée par la longueur d'arc. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la courbe paramétrée

$$\begin{array}{rccl} \gamma_a : & [\alpha,\beta] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) + aN_{alg}(t) \end{array}$$

où N_{alg} est la normale algébrique de γ, est dite *courbe parallèle* à γ. Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés des courbes parallèles.



Courbes parallèles à une ellipse.

1) Montrer que les image des points singuliers de la famille de courbes $(\gamma_a)_{a\in\mathbb{R}}$ forment le support de la développée de γ (on rappelle que la courbe

développée est la courbe des centres de courbure).

Rép.– Puisque γ est paramétrée par la longueur d'arc, on a $N'_{alg}(t) = -k_{alg}(t)\gamma'(t)$ d'où

$$\gamma'_a(t) = \gamma'(t) - ak_{alg}(t)\gamma'(t) = (1 - ak_{alg}(t))\gamma'(t).$$

Par conséquent $t \in I$ est un point singulier de γ_a ssi $a = k_{alg}(t)^{-1}$. Son image est alors le point $\gamma(t) + k_{alg}(t)^{-1}N_{alg}(t)$ qui est le centre de courbure de γ au point t.

2) Calculer la longueur d'arc de γ_a et montrer que si $|a|$ est suffisamment petit alors

$$Long(\gamma_a) + Long(\gamma_{-a}) = 2Long(\gamma).$$

Rép.– D'après la question précédente, si $|a| < \sup_{t\in[\alpha,\beta]} |k_{alg}(t)|$ alors $\|\gamma'_a\| = (1 - ak_{alg}(t))\|\gamma'(t)\|$ et donc $\|\gamma'_a(t)\| + \|\gamma'_{-a}(t)\| = 2\|\gamma'(t)\|$.

3) Montrer que, si a est suffisamment petit, la normale algébrique $N_{a,alg}$ de γ_a est égale à la normale algébrique N_{alg} de γ. On prendra garde que si $a \neq 0$ la courbe γ_a n'est pas paramétrée par l'abscisse curviligne.

Rép.– D'après la question 1, on a $\gamma'_a(t) = (1 - ak_{alg}(t))\gamma'(t)$. Si $|a| < \sup_{t\in[\alpha,\beta]} |k_{alg}(t)|$ alors $(1 - ak_{alg}(t)) > 0$ et donc le vecteur tangent normalisé T_a de γ_a est égal au vecteur tangent normalisé T de γ : pour tout $t \in I$, $T_a(t) = T(t)$. On en déduit $N_{a,alg}(t) = Rot_{+\frac{\pi}{2}}T_a(t) = Rot_{+\frac{\pi}{2}}T(t) = N_{alg}(t)$.

4) Déterminer le rayon de courbure R_a aux points réguliers de γ_a. On discutera selon que $k_{alg} = \pm k$.

Rép.– De $\gamma'_a(t) = (1-ak_{alg}(t))\gamma'(t)$, on déduit $\gamma''_a(t) = -ak'_{alg}(t)\gamma'(t)+(1-ak_{alg}(t))\gamma''(t)$, puis, si $a \neq k^{-1}_{alg}(t)$,

$$k_a(t) = \frac{|det(\gamma'_a(t), \gamma''_a(t))|}{\|\gamma'_a(t)\|^3} = \frac{(1 - ak_{alg}(t))^2|det(\gamma'(t), \gamma''(t))|}{|1 - ak_{alg}(t)|^3\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{1}{|1 - ak_{alg}(t)|}|k_{alg}(t)|.$$

Si $k_{alg} = k$ alors $R_a(t) = |k^{-1}(t) - a| = |R(t) - a|$ où $R(t)$ est le rayon de courbure de γ en t. Si $k_{alg} = -k$ alors $R_a(t) = |k^{-1}(t) + a| = |R(t) + a|$.

5) Soit $a \neq 0$. Dans cette question on se place en un point t tel $k_{alg}(t) = a^{-1}$ et on suppose $k'_{alg}(t) \neq 0$. Montrer que t est un point de rebroussement de première espèce de γ_a.

Rép.– D'après la question 1, un point $t \in I$ tel que $k_{alg}(t) = a^{-1}$ est un point singulier. Calculons en ce point les dérivées seconde et troisième. On a :

$$\gamma_a''(t) = -ak_{alg}'(t)\gamma'(t) + (1 - ak_{alg}(t))\gamma''(t) = -ak_{alg}'(t)\gamma'(t)$$

et

$$\begin{aligned} \gamma_a'''(t) &= -ak_{alg}''(t)\gamma'(t) - 2ak_{alg}'(t)\gamma''(t) + (1 - ak_{alg}(t))\gamma'''(t) \\ &= -ak_{alg}''(t)\gamma'(t) - 2ak_{alg}'(t)\gamma''(t) \end{aligned}$$

D'une part, puisque $a \neq 0$ et $k_{alg}'(t) \neq 0$, on a

$$Vect(\gamma_a''(t), \gamma_a'''(t)) = Vect(\gamma'(t), \gamma''(t)).$$

D'autre part, comme γ est birégulière, on a

$$dim\ Vect(\gamma'(t), \gamma''(t)) = 2$$

et donc t est un point de rebroussement de première espèce.

6) Soit $(\delta_{t_0})_{t_0 \in \mathbb{R}}$ la famille des développantes de γ :

$$\forall\ t \in I = [\alpha, \beta], \quad \delta_{t_0}(t) := \gamma(t) - (t + t_0)\gamma'(t).$$

Montrer que pour tout couple $(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^2$ avec $-t_0 < \alpha$, $-t_1 < \alpha$, les développantes δ_{t_0} et δ_{t_1} sont parallèles.

Rép.– D'une part on a

$$\delta_{t_0}'(t) = \gamma'(t) - \gamma'(t) - (t + t_0)\gamma''(t) = -(t + t_0)k_{alg}(t)N_{alg}(t) \neq 0$$

car $-t_0 < \alpha \leq t$. Par conséquent

$$N_{alg}(\delta_{t_0})(t) = \pm\gamma'(t)$$

le signe ne dépendant que de celui de k_{alg} puisque pour tout $t \in I$, $t + t_0 > 0$. D'autre part,

$$\delta_{t_1}(t) - \delta_{t_0}(t) = (t_1 - t_0)\gamma'(t).$$

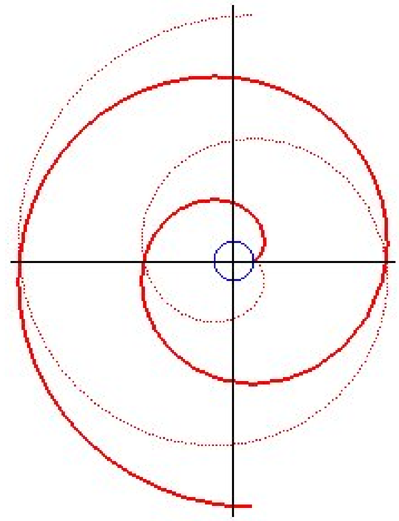
Ainsi δ_{t_0} et δ_{t_1} sont parallèles.

7) Soient $R > 0$ et γ donnée par $\gamma(t) = (R\cos\dfrac{t}{R}, R\sin\dfrac{t}{R})$ avec $t \in \mathbb{R}$.

i) Ecrire les développantes $(\delta_{t_0})_{t_0 \in \mathbb{R}}$ de γ et montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad dist(\delta_{t_0}(t + 2\pi), \delta_{t_0}(t)) = Cte.$$

ii) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\delta_{t_0}(t + 2\pi) - \delta_{t_0}(t)$ est orthogonal à $\delta_{t_0}'(t)$ et à $\delta_{t_0}'(t + 2\pi)$.



Une développante d'un cercle.

Rép.– i) On a

$$\delta_{t_0}(t) = \gamma(t) - (t+t_0)\gamma'(t) = \left(R\cos\frac{t}{R} + (t+t_0)\sin\frac{t}{R}, R\sin\frac{t}{R} - (t+t_0)\cos\frac{t}{R}\right).$$

Puisque γ est 2π-périodique, on a $\delta_{t_0}(t+2\pi) = \gamma(t) - (t+2\pi+t_0)\gamma'(t)$ d'où

$$\delta_{t_0}(t+2\pi) - \delta_{t_0}(t) = 2\pi\gamma'(t)$$

et $dist(\delta_{t_0}(t+2\pi), \delta_{t_0}(t)) = 2\pi$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
ii) On a $\delta'_{t_0}(t) = -(t+t_0)\gamma''(t)$, $\delta'_{t_0}(t+2\pi) = -(t+2\pi+t_0)\gamma''(t)$ qui sont orthogonaux à $\delta_{t_0}(t+2\pi) - \delta_{t_0}(t) = 2\pi\gamma'(t)$ car γ est paramétrée par la longueur d'arc.

8) On dit qu'une courbe paramétrée $\delta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est *auto-parallèle* s'il existe un difféomorphisme $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que d'une part,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad dist(\delta(\varphi(t)), \delta(t)) = Cte$$

et d'autre part, $\delta'(\varphi(t))$ et $\delta'(t)$ sont orthogonaux à $\delta(\varphi(t)) - \delta(t)$. Montrer que si $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ paramétrée par la longueur d'arc est T-périodique alors toutes ses développantes δ_{t_0} sont des courbes auto-parallèles.

Rép.– Poser $\varphi(t) = t + T$ et refaire les mêmes calculs qu'à la question précédente.