Université Claude Bernard Lyon 1

M1 – Géométrie : Courbes et surfaces

Corrigé du contrôle partiel du 16 novembre 2016

Les documents sont autorisés mais les calculettes et les téléphones portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Si $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe birégulière C^∞ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est un difféomorphisme C^∞ alors un vecteur directeur de la droite tangente de $\varphi \circ \gamma$ en t est $d\varphi_{\gamma(t)}(T(t))$ où $T = \gamma'$.

Rép.– Vrai. Il suffit d'utiliser la formule de la différentielle d'une composition :

$$[\varphi(\gamma(t))]' = d\varphi_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$$

Puisque γ est birégulière, elle est régulière et $\gamma'(t) \neq 0$. Puisque φ est un difféomorphisme, $d\varphi_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \neq 0$. Par conséquent $d\varphi_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$ est un vecteur directeur de la droite tangente de $\varphi \circ \gamma$ en t.

2.– Si $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe birégulière C^∞ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est un difféomorphisme C^∞ alors un vecteur directeur de la droite normale de $\varphi \circ \gamma$ en t est $d\varphi_{\gamma(t)}(N(t))$ où N est la normale principale de γ.

Rép.– Faux. En général, $d\varphi_{\gamma(t)}$ ne préserve pas l'orthogonalité. Un exemple : Soit $\gamma(t) = (\cos t - 1, \sin t)$. On a $\gamma(0) = O$, $\gamma'(0) = (0, 1)$ et $N(0) = (-1, 0)$. Il suffit de choisir pour φ une application linéaire inversible telle que $\varphi(0, 1)$ et $\varphi((-1, 0)$ ne soient pas orthogonaux. Par exemple :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \longmapsto & (x, x + y). \end{array}$$

donne

$$d\varphi_{(x,y)}(N(0)) = d\varphi_{(x,y)} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } d\varphi_{(x,y)}(\gamma'(0)) = d\varphi_{(x,y)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui ne sont pas orthogonaux.

3.– Si $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe C^∞ ayant un point d'inflexion en $t = 0$ et si $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un difféomorphisme C^∞ alors la courbe $\varphi \circ \gamma$ a un point d'inflexion en $t = 0$.

Rép.– Faux. Considérons γ et φ données par $\gamma(t) = (t, t^3 + t^4)$ et $\varphi(x, y) = (x, y - x^3)$. La courbe γ a un point d'inflexion en $t = 0$ mais pas la courbe $\varphi \circ \gamma(t) = (t, t^4)$.

4.– Si $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est une courbe régulière C^∞ et $\varphi : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est donnée par $z \mapsto z^2$ alors la courbe $\varphi \circ \gamma$ est régulière.

Rép.– Vrai. On le constate facilement avec un calcul direct. On peut aussi remarquer que si $z = x + iy$ alors $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ et

$$d\varphi_{x,y} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

qui est inversible puisque le déterminant vaut $4(x^2 + y^2) > 0$. Donc $rang\ d\varphi_{x,y} = 2$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(\varphi \circ \gamma)'(t) = d\varphi_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \neq 0$.

5.– Si $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ une courbe régulière fermée simple C^∞ et $\varphi : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est donnée par $z \mapsto z^2$ alors a courbe $\varphi \circ \gamma$ possède un point double.

Rép.– Faux. L'application φ restreinte au demi-plan $H = \{Im(z) > 0\}$ est un difféomorphisme de H dans $\varphi(H) = \mathbb{C} \setminus \{Im(z) = 0 \text{ et } Re(z) \geq 0\}$. Si γ est une courbe fermée simple dont le support est inclus dans H alors $\varphi \circ \gamma$ est une courbe fermée simple dont le support est inclus dans $\varphi(H)$.

6.– Si $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est birégulière C^∞ telle que $\gamma(0) = 0$ et si $\varphi : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est comme à la question précédente alors la courbe $\varphi \circ \gamma$ admet un point de rebroussement de première espèce en $t = 0$.

Rép.– Vrai. Puisque γ est birégulière, on a

$$\gamma(t) = t\gamma'(0) + \frac{t^2}{2}\gamma''(0) + \frac{t^3}{6}\gamma'''(0) + o(t^3)$$

avec $\gamma'(0)$ et $\gamma''(0)$ linéairement indépendants. On en déduit

$$\varphi \circ \gamma(t) = t^2\gamma'(0)^2 + t^3\gamma'(0).\gamma''(0) + o(t^3)$$

où l'on a identifié vecteur et affixe. Puisque $\gamma'(0)$ et $\gamma''(0)$ linéairement indépendants, il en est de même de $\gamma'(0).\gamma'(0)$ et $\gamma'(0).\gamma''(0)$ ce qui montre que $t = 0$ est un point de rebroussement de première espèce de $\varphi \circ \gamma$.

7.– Soient $w \in \mathbb{C}^*$, $\alpha = xdy - ydx$ et

$$\gamma : \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & x(t) + iy(t) \end{array}$$

une courbe fermée. On note γ_w la courbe paramétrée $t \longmapsto w.(x(t) + iy(t))$ avec $t \in\ [0, 2\pi]$. On a

$$\int_{\gamma_w} \alpha = |w|^2 \int_\gamma \alpha.$$

Rép.– Vrai. Notons que la multiplication par w est l'écriture complexe de la composée d'une homothétie de rapport $|w|$ et d'une rotation de centre 0 et d'angle $\arg w$. D'après la formule de Green-Riemann, $\int_{\gamma_w} \alpha$ est l'aire enclose par w. Celle-ci est la même que celle enclose par γ à un facteur $|w|^2$ près.

8.– Si $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ est telle que $F(0, 0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = 0$ alors il n'existe pas de courbe régulière $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\epsilon > 0$, telle que

$$\gamma(0) = (0, 0) \text{ et } \forall t \in]-\epsilon, \epsilon[, \quad F(\gamma(t)) = 0.$$

Rép.– Faux. Considérer par exemple $F(x, y) = (y - x)^2$. On a $F(0, 0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = 0$. Pourtant $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $\gamma(t) = (t, t)$ satisfait à

$$\gamma(0) = (0, 0) \text{ et } \forall t \in\ \mathbb{R}, \quad F(\gamma(t)) = 0$$

et elle est régulière.

9.– Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on définit $P_t(x) := x^3 - (2 + t)x + 1$ et on pose

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid P_t(x) = 0\}$$

Il existe $\epsilon > 0$ et une courbe $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow D$ régulière telle que $\gamma(0) = (0, 1)$.

Rép.– Vrai. Posons $F(t, x) := P_t(x)$. Observons que $D = F^{-1}(0)$ et $(0, 1) \in D$. Puisque

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = 3x^2 - (2 + t)$$

on a $\frac{\partial F}{\partial x}(0, 1) = 3 - 2 = 1 \neq 0$, le théorème de la fonction implicite montre qu'il existe une fonction $\varphi :]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\varphi(0) = 1$ et $\forall t \in]-\epsilon, \epsilon[$, $F(t, \varphi(t)) = 0$. La courbe paramétrée C^∞

$$\gamma : \begin{array}{ccc}]-\epsilon, \epsilon[& \longrightarrow & D \\ t & \longmapsto & (t, \varphi(t)) \end{array}$$

est telle que $\gamma(0) = (0, 1)$ et elle est régulière car $\gamma'(t) = (1, \varphi'(t)) \neq 0$.

10.– Soit $F(x, y) = x + y - x^4 - y^4$ et soit $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\epsilon > 0$, une courbe paramétrée régulière telle que

$$\gamma(0) = (0, 0) \text{ et } \forall t \in]-\epsilon, \epsilon[, \quad F(\gamma(t)) = 0.$$

Alors la courbure de γ en $t = 0$ est nulle.

Rép.– Vrai. Posons $D = F^{-1}(0)$ et constatons que $(0, 0) \in D$. Puisque

$$F_y(x, y) = 1 - 4y^3$$

on a $F_y(0, 0) = 1 \neq 0$, le théorème de la fonction implicite montre qu'il existe un voisinage $]-\epsilon, \epsilon[\times I$ de $(0, 0)$ et une application $\varphi :]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ vérifiant $\varphi(0) = 0$ et telle que pour tout $(x, y) \in]-\epsilon, \epsilon[\times I$ on a

$$F(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x) \qquad (*)$$

De plus, pour tout $t \in]-\epsilon, \epsilon[$ on a

$$\varphi'(t) = -\frac{F_x(t, \varphi(t))}{F_y(t, \varphi(t))}$$

d'où l'on déduit

$$\varphi''(t) = -\frac{F_x(t, \varphi(t))\,(F_{xy}(t, \varphi(t)) + \varphi'(t) F_{yy}(t, \varphi(t))) - F_y(t, \varphi(t))\,(F_{xx}(t, \varphi(t)) + \varphi'(t) F_{xy}(t, \varphi(t)))}{F_y^2(t, \varphi(t))}$$

Or $F_x(x, y) = 1 - 4x^3$ et $F_{xx}(x, y) = -12x^2$, $F_{xy}(x, y) = 0$ et $F_{yy}(x, y) = -12y^2$. Ainsi $\varphi'(0) = -1$ et $\varphi''(0) = 0$. Posons

$$\begin{array}{rccc} \gamma : &]-\epsilon, \epsilon[& \longrightarrow & D \\ & t & \longmapsto & (t, \varphi(t)) \end{array}$$

On a évidemment

$$\gamma(0) = (0, 0) \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}, \quad F(\gamma(t)) = 0$$

La courbure principale k de γ en $t = 0$ vaut

$$k(0) = \frac{|\varphi''(0)|}{(1 + \varphi'^2(0))^{3/2}} = 0.$$

D'après $(*)$ toute courbe δ vérifiant $\delta(0) = (0, 0)$ et $F(\delta(t)) = 0$ s'obtient à partir de γ par reparamétrage : $\delta = \gamma \circ \psi$. Si δ est régulière c'est que ce reparamétrage est un C^1 difféomorphisme (quitte à réduire la taille des intervalles). Par conséquent, la courbure principale de δ est la même que celle de γ.

Problème. – Soient $a < 0 < b$ et $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe C^∞ birégulière paramétrée par la longueur d'arc. On note k (resp. τ) sa courbure (resp. sa torsion). On suppose que $\gamma(0) = O$.

1) On se place dans le repère de Frenet $\mathcal{R} = (O; T_0, N_0, B_0)$. Montrer que l'on a

$$\gamma(s) = \left(s - \frac{k_0^2}{6}s^3\right)T_0 + \left(\frac{k_0}{2}s^2 + \frac{k_0'}{6}s^3\right)N_0 + \frac{k_0\tau_0}{6}s^3 B_0 + o(s^3)$$

où $T_0 = T(0)$, $N_0 = N(0)$, $B_0 = B(0)$, $k_0 = k(0)$, $k_0' = k'(0)$ et $\tau_0 = \tau(0)$.

Rép.– D'après les formules de Frenet on a

$$\begin{aligned}
\gamma(s) &= \gamma(0) + s\gamma'(0) + \frac{s^2}{2}\gamma''(0) + \frac{s^3}{6}\gamma'''(0) + o(s^3)\\
&= sT_0 + \frac{s^2}{2}k_0N_0 + \frac{s^3}{6}(k_0'N_0 - k_0^2T_0 + k_0\tau_0B_0) + o(s^3)\\
&= \left(s - \frac{k_0^2}{6}s^3\right)T_0 + \left(\frac{k_0}{2}s^2 + \frac{k_0'}{6}s^3\right)N_0 + \frac{k_0\tau_0}{6}s^3B_0 + o(s^3)
\end{aligned}$$

2) Soit S une sphère de centre $\Omega = (x_1, y_1, z_1)$ (dans le repère $\mathcal{R}$) et de rayon $R = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.
i) Montrer que si est s suffisamment petit alors $\gamma(s) \neq \Omega$.
ii) On suppose s tel $\gamma(s) \neq \Omega$. On note $Q(s)$ l'intersection de de la demi droite $\Omega + \mathbb{R}_+\overrightarrow{\Omega\gamma(s)}$ avec S. Montrer que

$$\|\Omega\gamma(s)\|^2 - \|\Omega Q(s)\|^2 = -2x_1s + (1 - k_0y_1)s^2 + \frac{1}{3}(x_1k_0^2 - y_1k_0' - z_1k_0\tau_0)s^3 + o(s^3).$$

Rép.– i) Si $\gamma(s) = \Omega$ alors $\|\overrightarrow{\Omega\gamma(s)}\| = 0$. Notons que $\|\overrightarrow{\Omega\gamma(0)}\| = R$. Par continuité de γ, pour tout $\epsilon > 0$ il existe un voisinage $]-\eta, \eta[\subset [a,b]$ de 0 tel que pour tout $t \in]-\eta, \eta[$ on ait $R - \epsilon < \|\Omega\gamma(s)\| < R + \epsilon$. Si $\epsilon < R$ ce voisinage convient.
ii) D'après la question précédente

$$\overrightarrow{\Omega\gamma(s)} = \left(s - \frac{k_0^2}{6}s^3 - x_1\right)T_0 + \left(\frac{k_0}{2}s^2 - \frac{k_0'}{6}s^3 - y_1\right)N_0 + \left(\frac{k_0\tau_0}{6}s^3 - z_1\right)B_0 + o(s^3)$$

d'où

$$\begin{aligned}
\|\Omega\gamma(s)\|^2 &= \left(s-\frac{k_0^2}{6}s^3-x_1\right)^2+\left(\frac{k_0}{2}s^2+\frac{k_0'}{6}s^3-y_1\right)^2+\left(\frac{k_0\tau_0}{6}s^3-z_1\right)^2+o(s^3)\\
&= (x_1^2+s^2-2x_1s+2x_1\frac{k_0^2}{6}s^3)+(y_1^2-2y_1\frac{k_0}{2}s^2-2y_1\frac{k_0'}{6}s^3)\\
&\quad +(z_1^2-2z_1\frac{k_0\tau_0}{6}s^3)+o(s^3)\\
&= R^2-2x_1s+(1-y_1k_0)\,s^2+\frac{1}{3}(x_1k_0^2-y_1k_0'-z_1k_0\tau_0)s^3+o(s^3)
\end{aligned}$$

Puisque $\|\Omega Q(s)\|^2=R^2$, on obtient la relation demandée.

3) On appelle *sphère osculatrice* de γ en $s=0$ une sphère S telle que $\gamma(0)\in S$ et $\|\Omega\gamma(s)\|^2-\|\Omega Q(s)\|^2=o(s^3)$.
i) Montrer que si $k_0\neq 0$ et $\tau_0\neq 0$ la sphère osculatrice existe et est unique.
ii) On suppose toujours $k_0\neq 0$ et $\tau_0\neq 0$. Dans quel(s) cas la sphère osculatrice de γ en $s=0$ et le cercle osculateur de γ au même point ont-ils même centre ? Et même rayon ?

Rép.– i) Pour qu'une sphère de centre (x_1,y_1,z_1) contenant $\gamma(0)$ soit osculatrice il faut et il suffit que

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2x_1 &=& 0\\ 1-y_1k_0 &=& 0\\ x_1k_0^2-y_1k_0'-z_1k_0\tau_0 &=& 0\end{array}\right.$$

i. e. $(x_1,y_1,z_1)=\left(0,\frac{1}{k_0},-\frac{k_0'}{k_0^2\tau_0}\right)$. Ceci montre que la sphère osculatrice existe et est unique.
ii) Ils ont même centre ssi $k_0'=0$ c'est-à-dire si γ est à courbure constante. Ils ont même rayon sous la même condition.

4) On suppose que γ est birégulière et qu'elle satisfait en outre $\tau(s)\neq 0$ pour tout $s\in[a,b]$. Soit

$$\begin{array}{rccl}\Omega: & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ & s & \longmapsto & \gamma(s)+\frac{1}{k(s)}N(s)-\frac{k'(s)}{k^2(s)\tau(s)}B(s)\end{array}$$

la courbe des centres des sphères osculatrices. Montrer qu'en tout point s où Ω est régulière, la droite tangente à Ω en s passe par le centre du cercle osculateur.

Rép.– D'après les relations de Frenet on a

$$\begin{aligned}\Omega'(s) &= T(s) + \left(\frac{1}{k(s)}\right)' N(s) + \frac{1}{k(s)}\left(-k(s)T(s) + \tau(s)B(s)\right) \\ &\quad + \left(-\frac{k(s)'}{k^2(s)\tau(s)}\right)' B(s) - \frac{k(s)'}{k^2(s)\tau(s)}(\tau(s)N(s)) \\ &= \mu(s)B(s)\end{aligned}$$

où

$$\mu(s) = \frac{\tau(s)}{k(s)} + \left(-\frac{k(s)'}{k^2(s)\tau(s)}\right)'$$

En un point s où Ω est régulière on a donc $\mu(s) \neq 0$ et la droite tangente est $\Omega(s)+\mathbb{R}B(s)$. Le centre $C(s)$ du cercle osculateur de γ en s est donnée par

$$C(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k(s)}N(s)$$

et puisque

$$\Omega(s) = C(s) - \frac{k'(s)}{k^2(s)\tau(s)}B(s)$$

on constate que $C(s) \in \Omega(s) + \mathbb{R}B(s)$.

On cherche désormais les courbes $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dont en chaque point la sphère osculatrice et le cercle osculateur ont même centre.

5) i) Montrer pour que toute courbe $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ C^∞ régulière non nécessairement paramétrée par la longueur d'arc, il existe deux applications $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2(1) \subset \mathbb{R}^3$ (i. e. pour tout $t \in [a,b]$, $\|f(t)\| = 1$) telles que

$$\forall t \in [a,b], \quad \gamma(t) = \gamma(a) + \int_a^t \alpha(u)f(u)du.$$

ii) Calculer la courbure de γ en fonction de f' et de α.
iii) Montrer que γ est birégulière si et seulement si f est régulière.
iv) Là où elle est définie, calculer la torsion de γ en fonction de α, de f' et du déterminant $det(f(t), f'(t), f''(t))$.

Rép.– i) On a

$$\gamma'(t) = \|\gamma'(t)\| \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \alpha(t)f(t)$$

en posant $\alpha(t) = \|\gamma'(t)\|$ et $f(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$. En reportant dans

$$\gamma(t) = \gamma(a) + \int_a^t \gamma'(u)du$$

on déduit la formule demandée.
ii) De $\gamma'(t) = \alpha(t)f(t)$ on déduit

$$\gamma''(t) = \alpha'(t)f(t) + \alpha(t)f'(t)$$

puis

$$\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| = \alpha^2(t)\|f(t) \wedge f'(t)\| = \alpha^2(t)\|f'(t)\|$$

car $\|f(t)\|^2 = 1$ entraîne par dérivation que $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux. Finalement

$$k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{\alpha^2(t)\|f'(t)\|}{\alpha^3(t)} = \frac{\|f'(t)\|}{\alpha(t)}$$

iii) C'est une conséquence immédiate du calcul précédent qui montre que

$$k(s) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|f'(t)\| > 0.$$

iv) On a

$$\gamma'''(t) = \alpha''(t)f(t) + 2\alpha'(t)f'(t) + \alpha(t)f''(t)$$

d'où

$$\langle \gamma(t) \wedge \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle = \langle \alpha^2(t)f(t) \wedge f'(t), \alpha(t)f''(t) \rangle = \alpha^3(t)det(f(t), f'(t), f''(t))$$

et

$$\tau = \frac{\langle \gamma(t) \wedge \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2} = \frac{det(f(t), f'(t), f''(t))}{\alpha(t)\|f'(t)\|^2}$$

aux points où $f'(t) \neq 0$.

6) i) Montrer que toute courbe $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ C^∞ birégulière (mais non nécessairement paramétrée par la longueur d'arc) et à courbure constante $c > 0$ s'écrit sous la forme

$$\forall t \in [a,b], \quad \gamma(t) = \gamma(a) + \frac{1}{c}\int_a^t \|f'(u)\|f(u)du \qquad (*)$$

où $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2(1) \subset \mathbb{R}^3$ est régulière.
ii) A-t-on la réciproque ?

Rép.– i) D'après la question précédente, toute courbe $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ C^∞ birégulière s'écrit sous la forme

$$\forall t \in [a,b], \quad \gamma(t) = \gamma(a) + \int_a^t \alpha(u)f(u)du$$

avec $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2(1) \subset \mathbb{R}^3$ régulière et $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$. Puisque $k(t) = \frac{\|f'(t)\|}{\alpha(t)}$ est constant, il faut donc $\alpha(t) = c^{-1}\|f'(t)\|$ et on obtient la forme demandée.
ii) D'après les calculs déjà effectuées, la réciproque est trivialement vraie : si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{S}^2(1) \subset \mathbb{R}^3$ est régulière et si $c > 0$ alors $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall t \in [a,b], \quad \gamma(t) = \gamma(a) + \frac{1}{c}\int_a^t \|f'(u)\| f(u) du$$

est birégulière et à courbure constante $c > 0$.

7) On se donne $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{S}^2(1)$ et on définit γ par la formule $(*)$ de la question précédente.
i) Reconnaître γ lorsque f est un paramétrage par la longueur d'arc de l'équateur de $\mathbb{S}^2(1)$
ii) Reconnaître γ lorsque f est un paramétrage à vitesse constante d'une latitude de $\mathbb{S}^2(1)$.
iii) Dans les deux cas précédents, déterminer et reconnaître le support de la courbe Ω des centres des sphères osculatrices.

Rép.– i) Soit $f(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, on a $\|f'(t)\| = 1$ et

$$\gamma(t) = \gamma(0) + \frac{1}{c}\int_0^t \|f'(u)\| f(u) du = \gamma(0) + \frac{1}{c}(\sin t, 1 - \cos t, 0)$$

c'est donc un cercle passant par $\gamma(0)$ et de rayon c^{-1}. Remarque : on peut se rappeler que par hypothèse au tout début du problème $\gamma(0) = O$ ...
ii) Soit $0 < r < 1$ et $f(t) = (r\cos t, r\sin t, \sqrt{1-r^2})$. On a $f'(t) = (-r\sin t, r\cos t, 0)$ et $\|f'(t)\| = r$. Puis

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \gamma(0) + \frac{1}{c}\int_0^t \|f'(u)\| f(u) du \\ &= \gamma(0) + \frac{r}{c}(r\sin t, r(1-\cos t), \sqrt{1-r^2}\ t) \end{aligned}$$

c'est donc une hélice circulaire passant par le point $\gamma(0)$ et dont l'axe est vertical.
iii) Notons que puisque γ est à courbure constante, la courbe Ω des centres des sphères osculatrices et la courbe C des centres de cercles osculateurs sont les mêmes. On a

$$\Omega(t) = \gamma(t) + \frac{1}{c}N(t) = C(t).$$

Dans le cas i, le support de la courbe $\Omega = C$ est réduit à un point qui est le centre du cercle. Dans le cas ii on a

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= c^{-1}\|f'(t)\| f(t) = \tfrac{r}{c}(r\cos(t), r\sin(t), \sqrt{1-r^2}) \\ \gamma''(t) &= \tfrac{r}{c}(-r\sin(t), r\cos(t), 0) \\ \gamma'''(t) &= \tfrac{r}{c}(-r\cos(t), -r\sin(t), 0) \end{aligned}$$

d'où $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = (r\cos(t), r\sin(t), \sqrt{1-r^2})$ puis

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = \frac{r^2}{c^2}(-r\sqrt{1-r^2}\cos t, -r\sqrt{1-r^2}\sin t, r^2)$$

et $B(t) = \frac{\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|} = (-\sqrt{1-r^2}\cos t, -\sqrt{1-r^2}\sin t, r)$, $N(t) = B(t) \wedge T(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$. D'où

$$\begin{aligned}
\Omega(t) &= \gamma(t) + \frac{1}{c}N(t) \\
&= \gamma(0) + \frac{r}{c}(r\sin t, r(1-\cos t), \sqrt{1-r^2}\ t) + \frac{1}{c}(-\sin t, \cos t, 0) \\
&= \gamma(0) + \frac{1}{c}(0,1,0) + \frac{r}{c}(r\sin t, r(1-\cos t), \sqrt{1-r^2}\ t) - \frac{1}{c}(\sin t, 1-\cos t, 0) \\
&= \gamma(0) + \frac{1}{c}(0,1,0) + \frac{1}{c}((r^2-1)\sin t, (r^2-1)(1-\cos t), \sqrt{1-r^2}\ t)
\end{aligned}$$

Ainsi Ω est une hélice circulaire passant par $\gamma(0) + \frac{1}{c}(0,1,0)$ et dont l'axe est vertical.

8) On suppose maintenant que $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{S}^2(1)$ est une courbe C^∞ régulière et fermée et on définit comme précédemment γ par la formule $(*)$.
i) Sous quelle condition sur f la courbe γ est-elle fermée ?
ii) Donner un exemple explicite d'une courbe paramétrée régulière fermée f qui ne soit pas un cercle est telle que γ soit fermée à courbure constante non nulle.

Rép.– i) D'après la formule $(*)$ pour que γ soit fermée il faut et il suffit que

$$\int_a^b \|f'(u)\| f(u) du = 0.$$

ii) Soit $\Phi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$ la paramétrisation usuelle de la sphère épointée des pôles Nord et Sud. On va chercher f sous la forme $f(t) = \Phi(u(t), t)$ avec $t \in [0, 2\pi]$. Notons que

$$f'(t) = u'(t)\Phi_u(u(t), t) + \Phi_v(u(t), t)$$

et puisque $\langle \Phi_u(u(t), t), \Phi_v(u(t), t)\rangle = 0$, $\|\Phi_u(u(t), t)\| = 1$ et $\|\Phi_v(u(t), t)\| = |\sin u(t)|$ on a

$$\|f'(t)\|^2 = u'^2(t)\|\Phi_u(u(t), t)\|^2 + \|\Phi_v(u(t), t)\|^2 = u'^2(t) + \sin^2 u(t)$$

Remarquons que

$$\Phi(\pi - u, v + \pi) = (\sin(\pi - u)\cos(v + \pi), \sin(\pi - u)\cos(v + \pi), \cos(\pi - u)) = -\Phi(u, v)$$

Soit $u : [0, 2\pi] \longrightarrow]0, \pi[$ telle que $u(t + \pi) = \pi - u(t)$ (par exemple $u(t) = \frac{\pi}{2} + \cos t$ convient). D'une part on a

$$f(t + \pi) = \Phi(u(t + \pi), t + \pi) = \Phi(\pi - u(t), t + \pi) = -\Phi(u(t), t) = -f(t)$$

D'autre part, de $u(t+\pi) = \pi - u(t)$ on déduit $u'(t+\pi) = -u'(t)$ et

$\|f'(t+\pi)\|^2 = u'^2(t+\pi)+\sin^2 u(t+\pi) = u'^2(t)+\sin^2(\pi-u(t)) = u'^2(t)\sin^2 u(t) = \|f'(t)\|^2.$

Au bilan

$$\|f'(t+\pi)\| f(t+\pi) = -\|f'(t)\| f(t)$$

et par conséquent

$$\int_0^{2\pi} \|f'(t)\| f(t) dt = 0.$$

Ainsi

$$[0, 2\pi] \ni t \longmapsto \gamma(t) = \gamma(0) + \frac{1}{c}\int_0^t \|f'(x)\| f(x) dx \in \mathbb{R}^3$$

est une courbe paramétrée fermée à courbure constante non nulle. Notons que f n'est pas un cercle sauf si on choisit la fonction u constante égale à $\frac{\pi}{2}$.