

CM 2 : H -principes en pagaille

Vincent Borrelli

22 octobre 2012

Une relation différentielle \mathcal{R} satisfait au h -principe (ou au principe homotopique) si l'inclusion naturelle $J : \text{Sol}(\mathcal{R}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{R})$ est induit une surjection sur les composantes connexes. Si cette inclusion induit une bijection au niveau de tous les groupes d'homotopies, on parle alors de h -principe paramétrique.

Dans ce cours, on donne quelques exemples de relations différentielles célèbres qui satisfont au h -principe, on présente ensuite différentes méthodes permettant démontrer l'existence d'un h -principe. Deux de ces méthodes seront détaillées dans la suite du cours.

1 Exemples de h -principes

On peut trouver un condensé d'exemples divers sur la page de John Francis [1]. Voici mon propre choix, évidemment bien subjectif.

1.1 Théorèmes de Smale et Hirsch

Théorème (Smale-Hirsch 58-59, Gromov 71). – Soient M^m et N^n deux variétés. On suppose que $m < n$ ou, si $m = n$, que M est ouverte. Alors, la relation différentielle des immersions \mathcal{I} satisfait au h -principe paramétrique.

Rappel.– Une variété est dite *fermée* si elle est compacte sans bord, elle est dite *ouverte* si aucune de ses composantes connexes n'est fermée. Une variété connexe dont le bord est non vide est ouverte.

Corollaire.– L'espace $I(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3)$ est connexe. En particulier, on peut retourner la sphère ronde $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ parmi les immersions.

Démonstration du corollaire.– Puisque \mathcal{I} satisfait au h -principe,

$$J : I(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{I}) = \text{Mono}(T\mathbb{S}^2, T\mathbb{R}^3)$$

induit une bijection au niveau du π_0 . On montre ensuite que

$$\pi_0 \text{Mono}(T\mathbb{S}^2, T\mathbb{R}^3) \approx \pi_2 \text{Gl}_+(3, \mathbb{R})$$

au moyen d'un calcul homotopique qui est techniquement un peu délicat car l'espace tangent $T\mathbb{S}^2$ n'est pas trivial. On ne le fera donc pas ici. Le groupe $\text{Gl}_+(3, \mathbb{R})$ se rétracte sur $SO(3)$ (Gram-Schmidt) donc $\pi_2 \text{Gl}_+(3, \mathbb{R}) = \pi_2 SO(3)$. Puisque \mathbb{S}^3 est le revêtement universel de $SO(3)$ on en déduit $\pi_2 SO(3) = \{0\}$. Ainsi, l'espace $I(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3)$ ne possède qu'une composante connexe et deux immersions quelconques sont donc toujours régulièrement homotopes. \square

On peut contourner l'obstacle que constitue la non trivialité de l'espace tangent $T\mathbb{S}^2$ au moyen d'une astuce appelée *microflexibilité*. Elle consiste à épaissir la sphère et à considérer les immersions de cette sphère épaissie \mathbf{S} dans \mathbb{R}^3 . La relation différentielle des immersions de \mathbf{S} dans \mathbb{R}^3 satisfait au h -principe (c'est le cas équidimensionnel dans le théorème de Smale-Hirsch) mais cette fois $T\mathbf{S}$ est un fibré trivial... Voyons ceci plus en détails.

Le retournement de la sphère.– Notons \mathbf{S} la sphère épaissie

$$\mathbf{S} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 - \epsilon^2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1 + \epsilon^2\}$$

où $0 < \epsilon < 1$ est fixé. On munit \mathbf{S} de l'orientation induite par \mathbb{R}^3 . On note ensuite

- $i : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, l'inclusion naturelle
- $inv : \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$, l'inversion, $x \longmapsto \frac{x}{\|x\|^2}$
- $s : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, la réflexion $s(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, -x_3)$.

On note enfin $I_+(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3)$ (resp. $I_-(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3)$) l'espace des immersions directes (resp. indirectes) de la variété orientée \mathbf{S} dans \mathbb{R}^3 . Le caractère directe ou indirecte d'une immersion se conservant par homotopie régulière, il en découle que le nombre de composantes connexes de $I(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3)$ est au moins deux. Précisément, la flèche

$$\chi : I(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3) = I_+(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3) \cup I_-(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

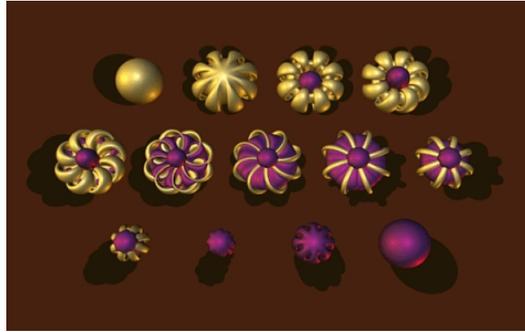
qui envoie l'immersion f sur 0 si $f \in I_+(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3)$ et sur 1 sinon, induit une surjection au niveau des composantes connexes :

$$\pi_0(\chi) : \pi_0(I(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3)) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Démontrer le retournement de la sphère revient à montrer que l'immersion

$$s \circ inv \circ i : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

est dans la même composante de $I_+(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3)$ que i . Pour cela on va montrer que $\pi_0(\chi)$ est une bijection ce qui suffira puisque $\chi(s \circ inv \circ i) = \chi(i)$.



Notons que $inv \circ i$ et i ne peuvent être dans la même composante de $I(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3)$ car ils n'induisent pas la même orientation sur \mathbf{S} . Puisque la variété \mathbf{S} est trivialement parallélisée dans \mathbb{R}^3 , on a

$$J^1(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3) = \mathbf{S} \times \mathbb{R}^3 \times Hom(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) = \mathbf{S} \times \mathbb{R}^3 \times \mathcal{M}_{3 \times 3}$$

et

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_+ \cup \mathcal{I}_-$$

où

$$\mathcal{I}_\pm = \mathbf{S} \times \mathbb{R}^3 \times Gl_\pm(3, \mathbb{R})$$

sont les deux composantes connexes de \mathcal{I} . En particulier

$$\Gamma(\mathcal{I}) = \Gamma(\mathcal{I}_+) \cup \Gamma(\mathcal{I}_-)$$

avec

$$\Gamma(\mathcal{I}_\pm) = C^0(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3 \times Gl_\pm(3, \mathbb{R})).$$

Or, \mathbf{S} se rétracte sur \mathbb{S}^2 et $Gl_+(3, \mathbb{R})$ sur $SO(3)$ (Gram-Schmidt), et par conséquent

$$\pi_0(\Gamma(\mathcal{I}_+)) = \pi_2(SO(3)) = 0.$$

De même

$$\pi_0(\Gamma(\mathcal{I}_-)) = 0.$$

Il s'en suit que $\Gamma(\mathcal{I}_+)$ et $\Gamma(\mathcal{I}_-)$ sont deux composantes connexes de $\Gamma(\mathcal{I})$, et puisque $\Gamma(\mathcal{I}) = \Gamma(\mathcal{I}_+) \cup \Gamma(\mathcal{I}_-)$, ce sont les seules. Puisque \mathcal{I} satisfait au h -principe paramétrique, on a

$$I(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3) = \text{Sol}(\mathcal{I}) \stackrel{e.h.f}{\sim} \Gamma(\mathcal{I})$$

et donc

$$\pi_0(I(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3)) = \pi_0(\text{Sol}(\mathcal{I})) = \pi_0(\Gamma(\mathcal{I})).$$

Ainsi le nombre de composantes connexes de $I(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3)$ est deux et par conséquent $\pi_0(\chi)$ est nécessairement bijective. \square

1.2 Théorèmes de Nash et Kuiper

Une application $f : (M^m, g) \xrightarrow{C^1} \mathbb{E}^q = (\mathbb{R}^q, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est dite *isométrique* si

$$f^* \langle \cdot, \cdot \rangle = g.$$

Pour une telle application

$$\text{Long}(f \circ \gamma) = \text{Long}(\gamma)$$

pour tout $\gamma : I \xrightarrow{C^1} M^m$. On note \mathcal{I}_{iso} la relation différentielle des immersions isométriques de M^m dans \mathbb{E}^q :

$$\mathcal{I}_{iso} = \{(x, y, L_{x,y}) \in J^1(M^m, \mathbb{E}^q) \mid L_{x,y} \in \text{Mono}_{iso}((T_x M, g_x); \mathbb{E}^q)\}.$$

Théorème (Nash-Kuiper 54-55, Gromov 86). – Soient (M^m, g) une variété riemannienne quelconque et $\mathbb{E}^q = (\mathbb{R}^q, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien tel que $q > m$. Alors, la relation différentielle des immersions isométriques \mathcal{I}_{iso} de M^m dans \mathbb{E}^q satisfait au h -principe paramétrique.

Observation.– Le théorème de Nash-Kuiper « historique » comporte également un résultat de C^0 -densité qui s'énonce comme suit : Si $f_0 : (M^n, g) \rightarrow \mathbb{E}^q$ est un plongement *strictement court* (i. e. $f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle < g$) alors pour tout $\epsilon : M^m \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ il existe un plongement C^1 isométrique $f : (M^n, g) \rightarrow \mathbb{E}^q$ tel que

$$\forall x \in M^m, \quad \|f(x) - f_0(x)\| \leq \epsilon(x).$$

Notons au passage que toute immersion est régulièrement homotope à une immersion courte...

Corollaire 1.– Soit Λ un réseau de \mathbb{E}^2 . Il existe un plongement isométrique C^1 du tore plat \mathbb{E}^2/Λ dans \mathbb{E}^3 .

Rappelons qu'un réseau Λ de \mathbb{R}^n est un sous-groupe discret de \mathbb{R}^n pour l'addition, tel que le sous-espace vectoriel engendré par Λ soit égal à \mathbb{R}^n . Il existe alors une famille de vecteurs (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{R}^n tel que $\Lambda = \mathbb{Z}e_1 + \dots + \mathbb{Z}e_n$. On appelle *tore plat* tout quotient \mathbb{E}^2/Λ où Λ est un réseau de \mathbb{R}^2 .

Démonstration du corollaire 1.– Notons $\mathbb{T}^2 = \mathbb{E}^2/\Lambda$. Puisque \mathcal{I}_{iso} satisfait au h -principe paramétrique, l'inclusion

$$J : I_{iso}(\mathbb{T}^2, \mathbb{E}^3) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{I}_{iso}) = Mono_{iso}(T\mathbb{T}^2, T\mathbb{E}^3)$$

induit une bijection au niveau du π_0 . Il suffit donc de montrer que $\Gamma(\mathcal{I}_{iso})$ n'est pas vide. Le tore \mathbb{T}^2 est évidemment parallélisable et donc

$$\mathcal{I}_{iso} = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^3 \times Mono_{iso}(\mathbb{E}^2, \mathbb{E}^3) = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^3 \times V_{2,3}^{o.n.}$$

où $V_{2,3}^{o.n.} \approx SO(3)$ est la variété de Stiefel des 2-repères orthonormés \mathbb{E}^3 . En effet, si (v_1, v_2) est une base orthonormée globale de $T\mathbb{T}^2$ alors la flèche

$$\begin{array}{ccc} Mono_{iso}(\mathbb{E}^2, \mathbb{E}^3) & \longrightarrow & V_{2,3}^{o.n.} \\ L & \longmapsto & (L(v_1), L(v_2)) \end{array}$$

permet d'identifier les deux espaces. En particulier

$$\Gamma(\mathcal{I}_{iso}) = C^0(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3 \times SO(3))$$

est évidemment non vide. □

Corollaire 2.– On peut retourner la sphère \mathbb{S}^2 parmi les immersions isométriques C^1 .

Démonstration du corollaire 2.– Puisque \mathcal{I}_{iso} satisfait au h -principe paramétrique, l'inclusion

$$J : I_{iso}(\mathbb{S}^2, \mathbb{E}^3) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{I}_{iso}) = Mono_{iso}(T\mathbb{S}^2, T\mathbb{E}^3)$$

induit une bijection au niveau du π_0 . Un calcul homotopique analogue à celui des immersions de la sphère montre que

$$\pi_0 Mono_{iso}(T\mathbb{S}^2, T\mathbb{E}^3) \approx \pi_2 SO(3) = \{0\}.$$

Ainsi l'espace $I_{iso}(\mathbb{S}^2, \mathbb{E}^3)$ ne possède qu'une composante connexe et deux immersions isométriques quelconques sont donc toujours régulièrement homotopes

parmi les immersions isométriques. \square

Corollaire 3.– *Il existe un plongement C^1 -isométrique de la sphère unité de \mathbb{R}^3 dans une boule de rayon arbitrairement petit.*

Démonstration du corollaire 3.– Il s’agit d’une application du résultat de C^0 -densité du théorème de Nash-Kuiper. Soit $0 < r < 1$ le rayon de la boule à l’arrivée, l’application

$$\begin{aligned} f_0 : \mathbb{S}^2(1) &\longrightarrow B^3(r) \\ p &\longmapsto \frac{r}{3}p \end{aligned}$$

est un plongement court. Donc, il existe un plongement C^1 isométrique $f : \mathbb{S}^2(1) \longrightarrow \mathbb{E}^3$ tel que $\|f - f_0\| \leq \frac{r}{3}$ ce qui implique que $f(\mathbb{S}^2(1)) \subset B^3(r)$. \square

1.3 Existence d’une forme symplectique

Définition.– Une 2-forme $\beta \in \Omega^2(M^{2n})$ est dite *non dégénérée* si, en tout point $x \in M^{2n}$, on a $\beta_x^n \neq 0$. Elle est dite *symplectique* si de plus $d\beta = 0$.

Soient $E = T^*M$ et \mathcal{R}_0 la relation différentielle définie sur l’espace des 1-jets du fibré E :

$$\mathcal{R}_0 = \{\kappa \in E^{(1)} \mid (d\kappa)^n \neq 0\}.$$

Ainsi, toute solution $\alpha \in \Omega^1(M) = \Gamma(T^*M)$ de \mathcal{R}_0 fournit une 2-forme $\omega = d\alpha$ qui est non dégénérée et qui vérifie $d\omega = 0$ par construction, c’est donc une forme symplectique.

Théorème (Gromov 1969).– *Si M^{2n} est une variété ouverte, alors la relation différentielle $\mathcal{R}_0 \subset E^{(1)}$ satisfait au h -principe paramétrique.*

Corollaire. – *Soit M^{2n} une variété ouverte. Alors, elle admet une forme symplectique si et seulement si elle admet une 2-forme non dégénérée.*

Démonstration du corollaire. Ici, il serait naturel de choisir

$$X = \{(x, \beta) \in \Lambda^2 T^*M \mid \beta \in \Lambda^2 T_x^*M \ \beta^n \neq 0\}$$

le fibré des formes bilinéaires antisymétriques non dégénérées, et

$$\mathcal{R} = \{\kappa \in X^{(1)} \mid d\kappa = 0\}.$$

Pourtant le h -principe porte sur la relation $\mathcal{R}_0 = \{\kappa \in E^{(1)} \mid (d\kappa)^n \neq 0\}$... Le lien entre $E^{(1)}$ et $\Lambda^2 T^*M$ est le suivant. Si $\alpha := \sum_{k=1}^m a_k dx_k$ est une 1-forme, ici écrite en coordonnées, alors son 1-jet en un point $x \in M^{2n}$ s'identifie à la donnée du point x et de $m^2 + m$ nombres :

$$j^1\alpha(x) = (x, a_1, \dots, a_m, a_{11}, \dots, a_{mm})$$

où $a_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial a_j}$ et $m = 2n$. La différentielle extérieure de α est une application linéaire sur ces nombres :

$$d\alpha_x = \sum_{i < j} (a_{ij} - a_{ji}) dx_i \wedge dx_j.$$

Par conséquent, la différentielle extérieure induit une application

$$\begin{array}{ccc} d : E^{(1)} & \longrightarrow & \Lambda^2 T^*M \\ \kappa & \longmapsto & d\kappa \end{array}$$

et qui s'écrit en coordonnées

$$\kappa = (x, \kappa_1, \dots, \kappa_m, \kappa_{11}, \dots, \kappa_{mm}) \longrightarrow d\kappa = (x, \sum_{i < j} (\kappa_{ij} - \kappa_{ji}) dx_i \wedge dx_j).$$

Cette application est surjective, c'est en fait une fibration (affine) avec

$$d^{-1}(x, \sum_{i < j} b_{ij} dx_i \wedge dx_j) = \{(x, \kappa_i, \kappa_{ij}) \mid \kappa_{ij} - \kappa_{ji} = b_{ij}\}.$$

En particulier, les espaces $E^{(1)}$ et $\Lambda^2 T^*M$ sont homotopiquement équivalents. Notons que $\mathcal{R}_0 = d^{-1}(X)$ et que $d : \mathcal{S}_0 \longrightarrow X$ et la restriction au dessus de X de la fibration $d : E^{(1)} \longrightarrow \Lambda^2 T^*M$. Ainsi \mathcal{R}_0 et X sont homotopiquement équivalents et il en est de même de $\Gamma(\mathcal{R}_0)$ et $\Gamma(X)$. Or $\Gamma(X)$ est non vide si et seulement si M^{2n} admet une 2-forme non dégénérée. Puisque \mathcal{R}_0 satisfait au h -principe, $Sol(\mathcal{R}_0)$ est non vide si et seulement si M^{2n} admet une 2-forme non dégénérée. \square

Observations.– 1) Il existe des versions plus élaborées où l'on impose la classe de cohomologie de la forme symplectique.

2) Il existe aussi des versions en géométrie de contact.

1.4 Théorème de Lohkamp (pour la culture)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et M^n est une variété compacte C^∞ . On $\mathcal{M}(M^n)$ l'espace des métriques sur M^n , puis $Ricci^{<\alpha}(M^n)$ (resp. $Scal^{<\alpha}(M^n)$) le sous-espace des

métriques dont la courbure de Ricci $Ricci(g)$ (resp. la courbure scalaire $Scal(g)$) est en tout point plus strictement petite que α .

Théorème de Lohkamp (1995).— Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, (M^n, g_0) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, alors g_0 est homotope à une métrique g telle que $Ricci(g) < \alpha$. En fait, les relations différentielles

$$Ricci(g) < \alpha \quad \text{et} \quad Scal(g) < \alpha$$

sur l'espace des 2-jets des métriques satisfont au h -principe paramétrique. De plus, $Ricci^{<\alpha}(M^n)$ et $Scal^{<\alpha}(M^n)$ sont C^0 -denses dans $\mathcal{M}(M^n)$.

- En particulier, si $n \geq 3$, la contrainte $Ricci(g) < 0$ n'impose rien sur la topologie de la variété...
- La dernière phrase du théorème signifie que toute métrique sur M^n compacte, $n \geq 3$, peut être approchée C^0 (mais pas C^1) par des métriques à courbure de Ricci négative ; par exemple la métrique usuelle de \mathbb{S}^n ...

2 Deux théorèmes de Gromov assurant un h -principe

Dans ce paragraphe on énonce deux théorèmes fondamentaux permettant de détecter un h -principe. La démonstration de ces deux théorèmes va occuper une grande partie du cours. Le premier théorème s'obtiendra comme une conséquence d'un théorème plus fondamental, le théorème d'approximation holonome ; le second théorème lui découlera d'une technique inspirée des travaux de Nash et de Kuiper, l'intégration convexe.

2.1 Le h -principe pour les relations $Diff(M)$ -invariantes

Définition.— Soit $X \rightarrow M$ un fibré. On suppose que le groupe $Diff(M)$ agit de façon naturelle sur $X^{(1)}$. On dira qu'une relation différentielle $\mathcal{R} \subset X^{(1)}$ est $Diff(M)$ -invariante si pour tout $\varphi \in Diff(M)$, $\varphi_*(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.

Action de $Diff(M)$ sur $J^1(M, N)$. — Soit $\varphi \in Diff(M)$, alors φ agit sur $J^1(M, N)$ par :

$$\varphi_*(x, y, L) = (\varphi(x), y, L \circ d\varphi_{\varphi(x)}^{-1}).$$

Si f est telle que $j^1 f(x) = (x, y, L)$ alors :

$$\varphi_*(j^1 f(x)) = (\varphi(x), f(x), df_x \circ d\varphi_{\varphi(x)}^{-1}) = j^1(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)).$$

Action de $Diff(M)$ sur $X^{(1)}$ où $X = T^*M$. – L'action de $\varphi \in Diff(M)$ sur $X^{(1)}$ est induite par la formule

$$\varphi^*(j^1\alpha(x)) := j^1(\varphi^*\alpha)(\varphi^{-1}(x))$$

où $\alpha \in \Omega^1(M) = \Gamma(T^*M)$. Cette action est moins aisée à décrire en coordonnées que la précédente car le jet d'ordre 2 de φ intervient. Par exemple, si $M = \mathbb{R}$ et si $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R})$ alors il existe $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\alpha_x = a(x)dx$ et le 1-jet $j^1\alpha(x)$ s'identifie au triplet $(x, a(x), a'(x))$. On a alors $(\varphi^*\alpha)_x = \varphi'(x).a \circ \varphi(x)dx$ et

$$(j^1\varphi^*\alpha)(x) = (x, \varphi'.a \circ \varphi(x), \varphi''(x).a \circ \varphi(x) + \varphi'^2(x).a' \circ \varphi(x)),$$

d'où l'action de φ sur $X^{(1)} \approx \{(x, a, A) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$:

$$\varphi^*(x, a, A) = (\varphi^{-1}(x), \varphi' \circ \varphi^{-1}(x).a, \varphi'' \circ \varphi^{-1}(x).a + \varphi'^2 \circ \varphi^{-1}(x).A).$$

Exemples.– La relation \mathcal{I} des immersions est $Diff(M)$ -invariante mais pas \mathcal{I}_{iso} . La relation \mathcal{R}_0 des 1-formes dont la différentielle est non dégénérée est $Diff(M)$ -invariante.

Théorème du h -principe pour les relations $Diff(M)$ -invariantes (Gromov 69).

– Soit M une variété ouverte et \mathcal{R} une relation différentielle ouverte et $Diff(M)$ -invariante, alors \mathcal{R} satisfait au h -principe paramétrique i.e.

$$J : Sol(\mathcal{R}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{R})$$

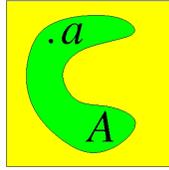
est une équivalence d'homotopie faible.

Observation.– Ce théorème implique le théorème de classification des immersions de Smale et Hirsch dans le cas équidimensionnel ainsi que le théorème d'existence de structures symplectiques sur les variétés ouvertes.

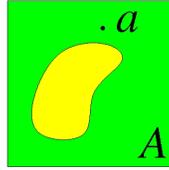
2.2 Le h -principe pour les relations amples

Amplitude d'une partie de \mathbb{R}^n . – Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, on note $IntConv(A, \alpha)$ l'intérieur de l'enveloppe convexe de la composante connexe de A qui contient α .

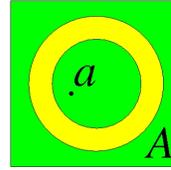
Définition. – Une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est *ample* si pour tout $\alpha \in A$ on a : $IntConv(A, \alpha) = \mathbb{R}^n$. En particulier $A = \emptyset$ est ample.



A est non ample



A est ample



A est non ample.

Exemple.– Un sous-espace vectoriel F de \mathbb{R}^n est ample si et seulement si $\text{Codim } F \geq 2$.

Amplitude d'une relation $\mathcal{R} \subset J^1(M, N)$. – Localement $J^1(M, N)$ s'identifie à :

$$J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \prod_{i=1}^m \mathbb{R}^n,$$

où \mathcal{U} et \mathcal{V} sont des cartes de M et N . On note (x, y, v_1, \dots, v_m) un élément de $J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ et on pose :

$$J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})^\perp = \{(x, y, v_1, \dots, v_{m-1})\},$$

ainsi $J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})^\perp \times \mathbb{R}^n$. On note p^\perp la projection sur le premier facteur et $\mathcal{R}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} \subset J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ l'image de $\mathcal{R} \subset J^1(M, N)$ par l'identification locale. Schématiquement, on a :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} & \longrightarrow & J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \\ & & \downarrow p^\perp \\ & & J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})^\perp. \end{array}$$

Enfin, si $z \in J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})^\perp$, on pose : $\mathcal{R}_z = (p^\perp)^{-1}(z) \cap \mathcal{R}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}$.

Définition. – Une relation différentielle $\mathcal{R} \subset J^1(M, N)$ est *ample* si pour toute identification locale $J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, et pour tout $z \in J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})^\perp$, \mathcal{R}_z est ample dans $(p^\perp)^{-1}(z) \simeq \mathbb{R}^n$.

Remarque. – Evidemment, cette définition ne dépend pas de la carte choisie puisqu'on les prend toutes...

Proposition. – La relation différentielle \mathcal{I} des immersions de M^m dans N^n est ample si $n > m$.

Démonstration. – Soit $J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \prod_{i=1}^m \mathbb{R}^n$ une représentation locale.

Alors

$$(x, y, v_1, \dots, v_m) \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} \iff (v_1, \dots, v_m) \text{ est libre dans } \mathbb{R}^n.$$

Soit $z = (x, y, v_1, \dots, v_{m-1}) \in J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})^\perp$.

1) Si (v_1, \dots, v_{m-1}) sont linéairement indépendants alors :

$$\begin{aligned} v_m \in (p^\perp)^{-1}(z) \text{ est dans } \mathcal{R}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} &\iff v_m \notin \text{Vect}(v_1, \dots, v_{m-1}) =: \Pi \\ &\iff v_m \in \mathbb{R}^n \setminus \Pi. \end{aligned}$$

Ainsi : $\mathcal{R}_z = \mathcal{R}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} \cap (p^\perp)^{-1}(z) = \mathbb{R}^n \setminus \Pi$. Or la codimension de Π est $n - (m - 1) \geq 2$, donc \mathcal{R}_z est ample.

2) Si (v_1, \dots, v_{m-1}) sont liés alors $\mathcal{R}_z = \emptyset$ et donc \mathcal{R}_z est ample. □

Théorème du h -principe pour les relations amples (Gromov 69). – Si \mathcal{R} est ouverte et ample, alors \mathcal{R} satisfait au h -principe paramétrique i.e.

$$J : \text{Sol}(\mathcal{R}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R})$$

est une équivalence d'homotopie faible.

Remarque. – Ici, pas d'hypothèse sur la variété M .

Observation.– Ce théorème implique le théorème de classification des immersions de Smale et Hirsch dans le cas de la codimension strictement positive.

Références

- [1] J. FRANCIS, *The h -principle, lectures 1 and 2 : overview*,
<http://math.northwestern.edu/jnkf/classes/hprin/>