

CM 5 : L'approximation holonome

Vincent Borrelli

December 11, 2012

1 Un coup de tonnerre

En 2002 paraît l'ouvrage *Introduction to the h -principle* de Y. Eliashberg et N. Mishachev [1] et son contenu produit l'effet d'une bombe dans le petit monde des topologues différentiels. Pourquoi un tel effet ? Les deux auteurs mettent en évidence la raison profonde de nombreux h -principes : celle-ci ne réside pas dans quelque caractéristique topologico-géométrique des relations différentielles mais dans une propriété d'approximation des sections holonomes. La relation différentielle n'a qu'un rôle secondaire, ce qui prime c'est la possibilité d'approcher une section quelconque de l'espace des jets par une section holonome. Pour résoudre une relation différentielle Eliashberg et Mishachev commencent donc par l'ignorer complètement...

2 Un exemple d'approximation holonome

La question de départ.— Soit $F_0 : M \longrightarrow J^1(M, N)$ une section, peut-on approcher F_0 par une section holonome F , c'est-à-dire, une section pour laquelle il existe $f : M \longrightarrow N$ telle que $F = j^1 f$? La réponse est non en général. Par exemple si $M = \mathbb{R}^2$ et $N = \mathbb{R}$ alors la section

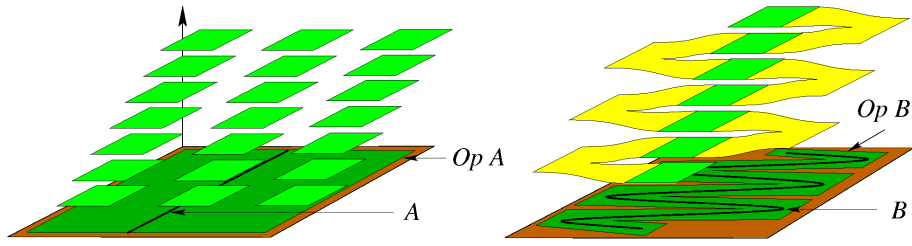
$$F_0(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1, 0, 0) \in M \times N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

ne s'approche pas avec une section holonome. En effet, si $j^1 f$ est une telle section, alors $f(x_1, x_2) \approx x_1$ et le théorème de Rolle implique qu'il existe des points p où $f_{x_1}(p) \approx 1$. Et 1, ce n'est pas près de 0...

Des prétentions à la baisse.— Une idée serait de chercher des sections holonomes définies non pas sur tout M mais sur des voisinages d'une sous-variété A de codimension 1 dans M . Dans l'exemple précédent, cela fonctionne pour $A = \{*\} \times \mathbb{R}$ mais pas pour $A = \mathbb{R} \times \{*\}$. Dans ce dernier cas

l'obstruction est la même que précédemment : le théorème de Rolle.

Une solution ondoyante.— La remarque fondamentale d'Eliashberg et de Mishachev est que dans le cas où $A = \mathbb{R} \times \{*\}$, il existe tout de même une approximation holonome, non sur un voisinage $\mathcal{O}p A$ de A mais sur un voisinage $\mathcal{O}p B \subset \mathcal{O}p A$ d'une déformation isotopique de A . Le dessin ci-dessous schématise la situation.



A gauche, le champ de plans horizontaux figure la section F_0 , à droite, le graphe d'une fonction f dont le 1-jet approxime la section F_0 au dessus de $\mathcal{O}p B$.

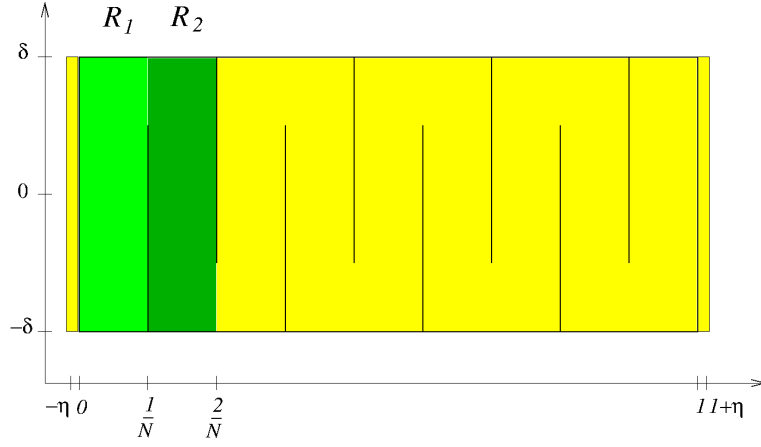
Une formalisation.— Pour ne pas s'encombrer avec des questions de non compacité, on décide de travailler sur $A = [0, 1] \times \{0\}$ et on choisit $\delta > 0$ tel que $[0, 1] \times]-\delta, \delta[\subset \mathcal{O}p A$. Soit $N = 2K + 1 > 0$ un entier impair. Pour tout $k \in \{0, \dots, K - 1\}$ on note

$$S_{2k+1} = \left\{ \frac{2k+1}{N} \right\} \times \left[-\delta, \frac{2}{3}\delta \right] \quad \text{et} \quad S_{2k} = \left\{ \frac{2k}{N} \right\} \times \left[-\frac{2}{3}\delta, \delta \right]$$

puis on pose

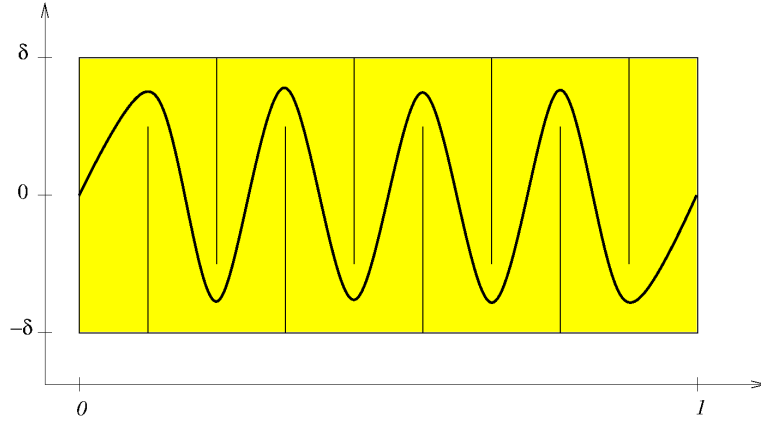
$$\mathcal{O}p B =]-\eta, 1 + \eta[\times]-\delta, \delta[\setminus \bigcup_{k \in \{1, \dots, N-1\}} S_k$$

où $\eta > 0$ est très petit.



L'ouvert $\mathcal{O}p B$, les segments verticaux sont les S_k .

La sous-variété B est une déformation isotopique de la sous-variété A dans la direction normale, elle «oscille» entre les segments S_k .



La sous-variété B .

On note $R_k = [\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}] \times]-\delta, \delta[$. Au dessus de chaque R_k , $k \in \{1, \dots, 2K+1\}$, une approximation holonome de F_0 est donnée par la section

$$\tilde{F}_k(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \frac{k-1}{N}, 0, 0)$$

qui est le 1-jet de la fonction constante $\tilde{f}_k(x_1, x_2) \equiv \frac{k-1}{N}$. Notre problème est de recoller les $\tilde{f}_k$ entre eux le long des $R_k \cap R_{k+1} \setminus S_k$. Voyons comment

faire pour $k = 1$. On modifie $\tilde{f}_1 : (x_1, x_2) \mapsto 0$ en

$$f_1(x_1, x_2) = \varphi\left(\frac{x_2}{\delta}\right) \frac{1}{N}$$

où $\varphi : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ est une fonction C^∞ en forme de S telle que $\varphi([-1, 0]) = 0$ et $\varphi([\frac{2}{3}, 1]) = 1$. Ainsi, pour $(x_1, x_2) \in \{\frac{1}{N}\} \times [\frac{2}{3}, 1[= R_1 \cap R_2 \setminus S_1$ on a

$$j^1 f_1\left(\frac{1}{N}, x_2\right) = \left(\frac{1}{N}, x_2, \frac{1}{N}, 0, 0\right) = j^1 \tilde{f}_2\left(\frac{1}{N}, x_2\right)$$

ce qui montre que les 1-jets se recollent. Notons également que

$$j^1 f_1(x_1, x_2) = \left(x_1, x_2, \varphi\left(\frac{x_2}{\delta}\right) \frac{1}{N}, 0, \frac{1}{\delta} \varphi'\left(\frac{x_2}{\delta}\right) \frac{1}{N}\right),$$

la proximité de $j^1 f_1$ à F_0 est entièrement contrôlée par N , précisément

$$\text{dist}(j^1 f_1(x_1, x_2), F_0(x_1, x_2)) = O\left(\frac{1}{N}\right)$$

pour la distance qu'on voudra. Evidemment, on procède de même pour les autres recollements.

3 Le lemme d'approximation holonome pour le segment

Lemme d'approximation holonome pour le segment. – Soit $A = [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ un segment et soit $F_0 : \mathcal{O}p A \rightarrow J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^q)$ une section. Alors, pour tout $\delta, \epsilon > 0$ il existe une difféotopie à support compact $h^\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ δ -petite ($h^0 = id_{\mathbb{R}^2}$, $h := h^1$, $\tau \in [0, 1]$) avec $h^1(A) \subset \mathcal{O}p A$ et une section holonome $F : \mathcal{O}p h(A) \rightarrow J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^q)$ telle que :

$$\forall p \in \mathcal{O}p h(A), \text{dist}_{J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^q)}(F(p), F_0(p)) < \epsilon.$$

Quelques précisions. – $\mathcal{O}p A$ = voisinage ouvert de A ; $\text{dist}_{J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^q)}$ est la distance riemannienne que l'on voudra sur $J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^q)$; une difféotopie h^τ est δ -petite si $h^0 = id$ et

$$\forall p \in \mathbb{R}^2, \forall \tau \in [0, 1], \text{dist}_{\mathbb{R}^2}(h^\tau(p), p) < \delta.$$

Démonstration.— On aimerait procéder comme ci-dessus. Pour cela il faut, au dessus de chaque rectangle R_k , posséder une section holonome $F_k = j^1 f_k$ qui soit proche de la section $F_0|_{R_k}$. Une telle section n'existe pas en général. Si nous en avons trouvé une si facilement dans le cas précédent c'est parce que la forme de F_0 était très particulière

$$F_0(x_1, x_2) = (x_1, x_2, y(x_1, x_2) = x_1, v_1(x_1, x_2) = 0, v_2(x_1, x_2) = 0)$$

puisqu'elle vérifiait $\frac{\partial y}{\partial x_2} = v_2$. Par conséquent, la section était déjà partiellement holonome le long des droites $\{x_1 = Cte\}$. En particulier, on pouvait travailler avec des rectangles R_k aussi longs qu'on le souhaitait. Nous n'avions pas de contrainte sur la valeur de δ autre que la condition $\mathcal{O}p B \subset \mathcal{O}p A$.

Notons que, *au dessus d'un point*, il est très facile d'approximer une section quelconque F_0 par une section holonome. Si en un point $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ on a

$$F_0(x^0) = (x^0, y(x^0), v_1(x^0), v_2(x^0))$$

alors on prendra

$$\tilde{F}_{x^0}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, y(x^0) + (x_1 - x_1^0)v_1(x^0) + (x_2 - x_2^0)v_2(x^0), v_1(x^0), v_2(x^0))$$

sur un voisinage $U_\delta(x^0) =]x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta[\times]x_2^0 - \delta, x_2^0 + \delta[$, la proximité de $\tilde{F}_{x^0}$ à F_0 étant contrôlée par δ . Au bilan, si $x^0 = (x_1^0, 0)$, la section $\tilde{F}_{x^0}$ nous donne une approximation de F_0 au dessus du rectangle $R(x^0) = [x_1^0 - \frac{1}{2N}, x_1^0 + \frac{1}{2N}] \times]-\delta, \delta[$ avec $\frac{1}{N} < \delta$. C'est ce que nous cherchions.

Quitte à réduire la valeur de δ dans les hypothèses du théorème on peut supposer que ce nombre est tel que

$$\forall x = (x_1, 0) \in [0, 1] \times \{0\}, \quad \forall p \in R(x), \quad \text{dist}(\tilde{F}_x(p), F_0(p)) < \epsilon/2$$

où, pour alléger les notations, on a écrit dist plutôt que $\text{dist}_{J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^q)}$. Pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$, posons $\tilde{F}_k := \tilde{F}_{x^k}$, $\tilde{F}_k = j^1 \tilde{f}_k$ et $R_k = R(x^k)$ avec $x^k = (\frac{2k-1}{2N}, 0)$. Il s'agit de recoller les $\tilde{f}_k$ le long des $R_k \cup R_{k+1} \setminus S_k$. Faisons-le pour $k = 1$. On modifie $\tilde{f}_1$ de la façon suivante

$$f_1(x) = \left(1 - \varphi\left(\frac{x_2}{\delta}\right)\right) \tilde{f}_1(x) + \varphi\left(\frac{x_2}{\delta}\right) \tilde{f}_2(x)$$

où $x = (x_1, x_2)$. D'une part on a

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) = \left(1 - \varphi\left(\frac{x_2}{\delta}\right)\right) \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x_1}(x) + \varphi\left(\frac{x_2}{\delta}\right) \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x_1}(x)$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) &= (1 - \varphi\left(\frac{x_2}{\delta}\right)) \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x_2}(x) + \varphi\left(\frac{x_2}{\delta}\right) \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x_2}(x) \\ &\quad - \frac{1}{\delta} \varphi'\left(\frac{x_2}{\delta}\right) (\tilde{f}_2(x) - \tilde{f}_1(x)).\end{aligned}$$

En particulier, pour $(x_1, x_2) \in \{\frac{1}{N}\} \times [\frac{2}{3}, 1[= R_1 \cap R_2 \setminus S_1$ on a $\varphi\left(\frac{x_2}{\delta}\right) = 1$ et $\varphi'\left(\frac{x_2}{\delta}\right) = 0$ d'où

$$\begin{aligned}j^1 f_1\left(\frac{1}{N}, x_2\right) &= \left(\frac{1}{N}, x_2, \tilde{f}_2\left(\frac{1}{N}, x_2\right), \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x_1}\left(\frac{1}{N}, x_2\right), \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x_2}\left(\frac{1}{N}, x_2\right)\right) \\ &= j^1 \tilde{f}_2\left(\frac{1}{N}, x_2\right)\end{aligned}$$

ce qui montre que les 1-jets se recollent. D'autre part

$$\begin{aligned}f_1(x) - \tilde{f}_1(x) &= \varphi\left(\frac{x_2}{\delta}\right) (\tilde{f}_2(x) - \tilde{f}_1(x)) \\ &= \varphi\left(\frac{x_2}{\delta}\right) (y(x^2) - y(x^1) + (x_1 - x_1^0)(v_1(x^2) - v_1(x^1)) + (x_2 - x_2^0)(v_2(x^2) - v_2(x^1)))\end{aligned}$$

Or $x^2 - x^1 = (\frac{1}{N}, 0)$ et $\|x_1 - x_1^0\| \leq \frac{1}{2N}$ et $\|x_2 - x_2^0\| \leq \delta$. Ainsi

$$\begin{aligned}\|f_1(x) - \tilde{f}_1(x)\| &\leq \|\tilde{f}_2(x) - \tilde{f}_1(x)\| \\ &\leq \|y(x^2) - y(x^1)\| + \frac{1}{2N} \|v_1(x^2) - v_1(x^1)\| + \delta \|v_2(x^2) - v_2(x^1)\|.\end{aligned}$$

Puis

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x_1}(x) = \varphi\left(\frac{x_2}{\delta}\right) \frac{\partial (\tilde{f}_2 - \tilde{f}_1)}{\partial x_1}(x)$$

d'où

$$\left\| \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x_1}(x) \right\| \leq \|v_1(x^2) - v_1(x^1)\|.$$

Enfin

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x_2}(x) = \varphi\left(\frac{x_2}{\delta}\right) \frac{\partial (\tilde{f}_2 - \tilde{f}_1)}{\partial x_2}(x) + \frac{1}{\delta} \varphi'\left(\frac{x_2}{\delta}\right) (\tilde{f}_2 - \tilde{f}_1)$$

d'où

$$\left\| \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x_2}(x) \right\| \leq \|v_2(x^2) - v_2(x^1)\| + \frac{1}{\delta} \|\varphi'\|_{C^0} \|\tilde{f}_2 - \tilde{f}_1\|.$$

Grâce à la continuité de y , v_1 et v_2 , les différences

$$\|y(x^2) - y(x^1)\|, \quad \|v_1(x^2) - v_1(x^1)\| \quad \text{et} \quad \|v_2(x^2) - v_2(x^1)\|$$

peuvent être rendues aussi petites qu'on le souhaite en augmentant le nombre N . Pour N suffisamment grand, on aura donc

$$\text{dist}(j^1 f_1(x), j^1 \tilde{f}_1(x)) < \epsilon/2.$$

Et comme on a choisit le nombre $\delta > 0$ tel que

$$\text{dist}(j^1 \tilde{f}_1(x), F_0(x)) < \epsilon/2$$

on a donc

$$\text{dist}(j^1 f_1(x), F_0(x)) < \epsilon.$$

□

Observation.— Dans le lemme, on peut remplacer $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$. Il faut alors

1) partir d'approximations holonomes $\tilde{F}_{x^0}$ sur les voisinages $U_\delta(x^0) =]x_1 - \delta, x_1 + \delta[\times \cdots \times]x_n - \delta, x_n + \delta[$,

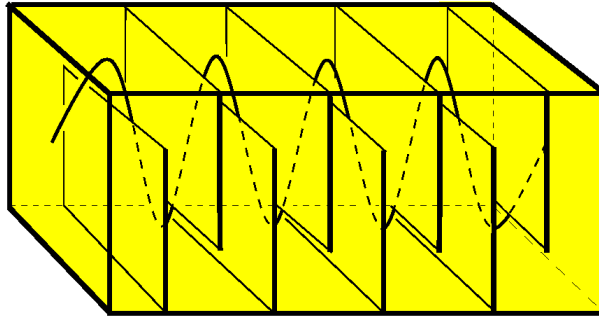
2) considérer les murs

$$S_{2k+1} = \left\{ \frac{2k+1}{N} \right\} \times]-\delta, \frac{2}{3}\delta[\times [-\delta, \delta]^{n-2} \quad \text{et} \quad S_{2k} = \left\{ \frac{2k}{N} \right\} \times \left[-\frac{2}{3}\delta, \delta \right] \times]-\delta, \delta]^{n-2}$$

3) recoller récursivement à partir de la formule

$$f_1(x) = (1 - \varphi\left(\frac{x_2}{\delta}\right))\tilde{f}_1(x) + \varphi\left(\frac{x_2}{\delta}\right)\tilde{f}_2(x)$$

où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.



L'image $h(A)$ du segment $A \subset \mathbb{R}^n$ dans l'ouvert $([0, 1] \times]-\delta, \delta]^{n-1}) \setminus \bigcup_{k \in \{1, \dots, N\}} S_k$.

La section holonome est définie sur $([0, 1] \times] - \delta, \delta[^{n-1}) \setminus \bigcup_{k \in \{1, \dots, N\}} S_k$. Notons que le difféomorphisme h laisse $[0, 1] \times] - \delta, \delta[\times \{0\}$ globalement invariant et que l'on peut choisir $\mathcal{O}ph(A) = ([0, 1] \times] - \delta, \delta[^{n-1}) \setminus \bigcup_{k \in \{1, \dots, N\}} S_k$.

4 Le lemme d'approximation holonome pour le carré

Lemme d'approximation holonome pour le carré. — Soit $A = [0, 1] \times [0, 1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ un carré et soit $F_0 : \mathcal{O}pA \longrightarrow J^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^q)$ une section. Alors, pour tout $\delta, \epsilon > 0$ il existe une difféotopie à support compact $h^\tau : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ δ -petite ($h^0 = id_{\mathbb{R}^3}$, $h := h^1$, $\tau \in [0, 1]$) avec $h^1(A) \subset \mathcal{O}pA$ et une section holonome $F : \mathcal{O}ph(A) \longrightarrow J^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^q)$ telle que :

$$\forall p \in \mathcal{O}ph(A), \text{ dist}(F(p), F_0(p)) < \epsilon.$$

Démonstration. — Soient $N_1 \in \mathbb{N}^*$ et $x^k = (\frac{2k-1}{2N_1}, 0, 0)$. Supposons qu'au dessus de chaque parallélepède

$$R_k = R(x^k) = \left[\frac{k-1}{N_1}, \frac{k}{N_1} \right] \times [0, 1] \times] - \delta, \delta[$$

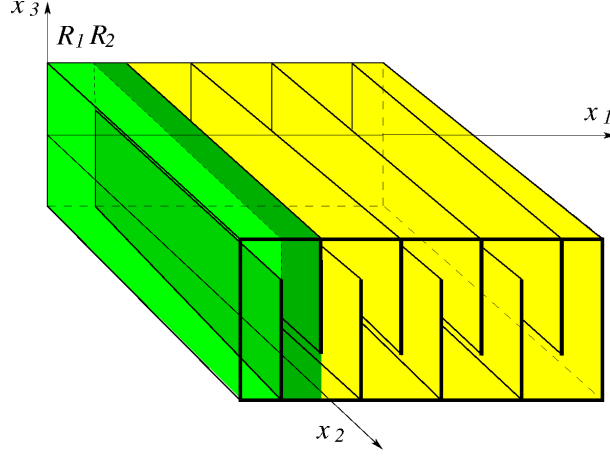
il existe une section holonome $\tilde{F}_k = j^1 \tilde{f}_k$ qui soit proche de la section $F_0|_{R_k}$. Alors, en procédant de la même façon que pour la démonstration du lemme d'approximation holonome pour le segment, on obtiendra une section holonome globale $F = j^1 f$ où

$$f : (A \times] - \delta, \delta[) \setminus \bigcup_{k \in \{1, \dots, N_1\}} S_k \longrightarrow \mathbb{R}^q$$

avec

$$S_{2k+1} = \left\{ \frac{2k+1}{N_1} \right\} \times [0, 1] \times \left[-\delta, \frac{2}{3}\delta \right] \quad \text{et} \quad S_{2k} = \left\{ \frac{2k}{N_1} \right\} \times [0, 1] \times \left[-\frac{2}{3}\delta, \delta \right]$$

et qui sera proche de F_0 au dessus de son domaine de définition.

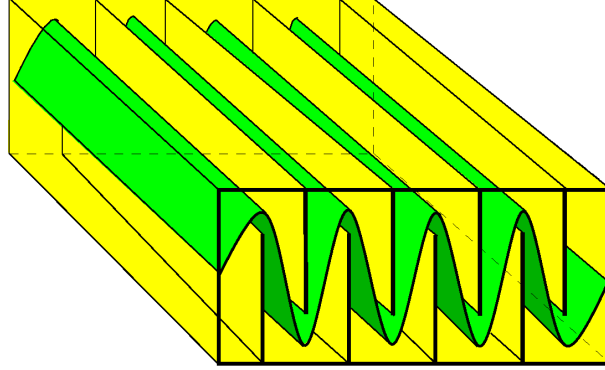


Le carré épaissi $A \times]-\delta, \delta[$, les murs S_k et les parallélépipèdes R_k .

Bien sûr, on aura recollé récursivement les $\tilde{f}_k$ à partir de la formule

$$f_1(x) = \left(1 - \varphi\left(\frac{x_3}{\delta}\right)\right) \tilde{f}_1(x) + \varphi\left(\frac{x_3}{\delta}\right) \tilde{f}_2(x)$$

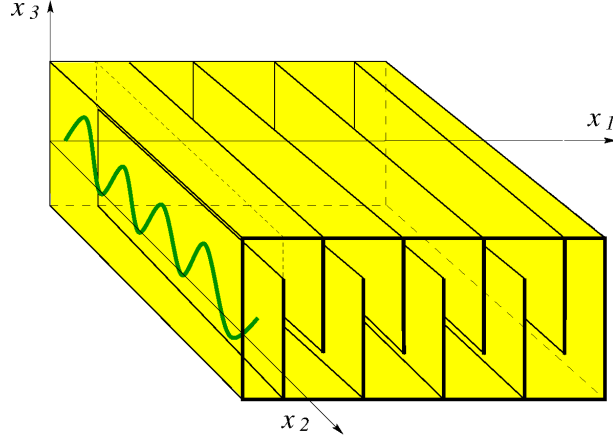
où $x = (x_1, x_2, x_3)$. Et on aura pris une difféotopie ψ^τ telle que $\psi^1(A)$ soit comme ci-dessous, en particulier $(A \times]-\delta, \delta[) \setminus \bigcup_{k \in \{1, \dots, N_1\}} S_k$ est un $\mathcal{O}p \psi^1(A)$.



L'image par $\psi = \psi^1$ du carré A (en vert).

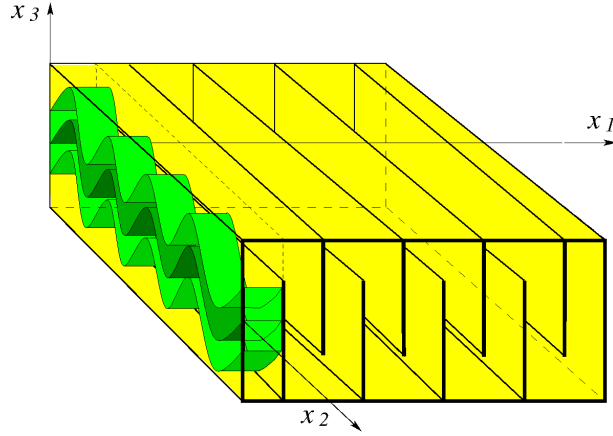
Le problème avec cette approche est qu'en général on ne dispose pas d'une section holonome au dessus de chaque parallélépipède R_k . Le lemme d'approximation holonome pour le segment ne fournit une section holonome que sur un ouvert « oscillant » à l'intérieur de R_k . Précisément, l'application du lemme d'approximation holonome pour le segment $I_{x_1} = \{x_1\} \times [0, 1] \times \{0\} \subset$

A fournit une section holonome $\tilde{F}_{x_1}$ définie sur un voisinage $\mathcal{O}p \varphi_{x_1}(I_{x_1})$ où φ_{x_1} est un difféomorphisme de $\mathcal{O}p \{x_1\} \times [0, 1] \times [-\delta, \delta]$. De plus $\tilde{F}_{x_1}$ est arbitrairement proche de F_0 au dessus de $\mathcal{O}p \varphi_{x_1}(I_{x_1})$, la proximité étant contrôlée par le nombre d'oscillations N_2 , c'est-à-dire le nombre de segments introduits dans la direction (Ox_3) pour construire $\varphi_{x_1}(I_{x_1})$.



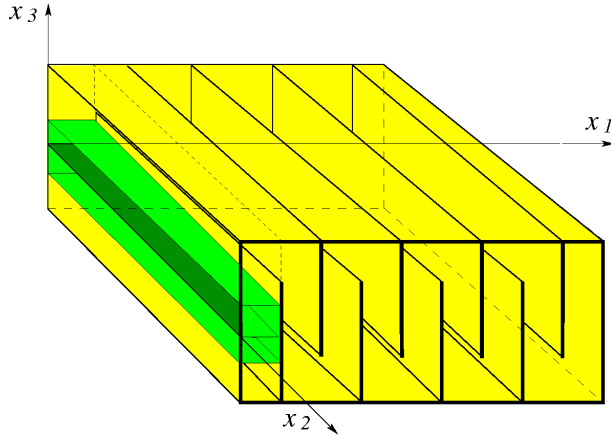
L'image $\varphi_{x_1}(I_{x_1})$ est dans le plan $\{x_1\} \times [0, 1] \times [-\delta, \delta]$.

On note $(\varphi^\tau)_{\tau \in [0, 1]}$ la famille d'applications obtenue en considérant collectivement les $\varphi_{x_1}^\tau$ restreintes à $\{x_1\} \times [0, 1] \times [-\delta, \delta]$, $x_1 \in [0, 1]$; et on note aussi φ pour φ^1 . Evacuons les détails en supposant que la famille $(\varphi^\tau)_{\tau \in [0, 1]}$ est une difféotopie étendue à $\mathbb{R}^3$ et avec support compact.



L'image $\varphi(B)$ (en vert foncé) de $B = \bigcup_{x_1 \in [0, \frac{1}{N_1}]} I_{x_1}$, et un voisinage $\mathcal{O}p \varphi(B)$ (bordé par les surfaces en vert clair).

Le point clef est le suivant : si $\tilde{F}_{x_1} = j^1 \tilde{f}_{x_1}$ est une section holonome sur $\mathcal{O}p \varphi(I_{x_1})$ alors $\left((\varphi_*)^{-1} \tilde{F}_{x_1}\right)(x) = j^1(\tilde{f}_{x_1} \circ \varphi)(\varphi^{-1}(x))$ est une section holonome sur $\mathcal{O}p I_{x_1}$. Il suffit donc de choisir N_1 suffisamment grand pour se retrouver dans la situation décrite en tout début de démonstration : les sections $(\varphi_*)^{-1} \tilde{F}_{x_1^k}$ avec $x_1^k = \frac{2k-1}{2N_1}$ sont holonomes au dessus des parallélépipèdes $R(x^k) = [\frac{k-1}{N_1}, \frac{k}{N_1}] \times [0, 1] \times] - \delta_1, \delta_1[$ avec $\delta_1 \leq \delta$. On peut donc recoller ces sections pour obtenir une section $\bar{F}$ holonome au dessus de $\mathcal{U} := (A \times] - \delta_1, \delta_1[) \setminus \bigcup_{k \in \{1, \dots, N_1\}} S_k$. La section globale $\bar{F}$ est proche de chacun des $(\varphi_*)^{-1} \tilde{F}_{x_1^k}$ (au dessus de leurs domaines de définition) et cette proximité est contrôlée par N_1 .



Le parallélépipède $R_1 = [0, \frac{1}{N_1}] \times [0, 1] \times] - \delta_1, \delta_1[$.

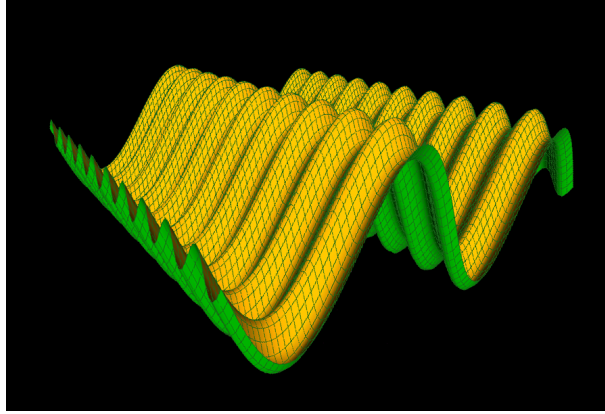
La section $\bar{F}$ est en général très éloignée de F_0 mais il suffit de composer par φ pour revenir près de F_0 . Notons $F := \varphi_* \bar{F}$. Cette section est holonome au dessus de $\varphi(\mathcal{U})$. On a

$$\text{dist}(F, F_0)|_{\varphi(\mathcal{U})} \leq \text{dist}(F_0, (\tilde{F}_{x_1})_{x_1 \in [0, 1]})|_{\varphi(\mathcal{U})} + \text{dist}((\tilde{F}_{x_1})_{x_1 \in [0, 1]}, F)|_{\varphi(\mathcal{U})}$$

pour la distance qu'on voudra. Le premier terme est aussi petit que l'on veut quitte à augmenter N_2 . Le second terme se contrôle avec N_1 puisque

$$\begin{aligned} \text{dist}((\tilde{F}_{x_1})_{x_1 \in [0, 1]}, F)|_{\varphi(\mathcal{U})} &= \text{dist}((\varphi_*(\varphi_*)^{-1} \tilde{F}_{x_1})_{x_1 \in [0, 1]}, \varphi_* \bar{F})|_{\varphi(\mathcal{U})} \\ &= \text{dist}((\varphi_*)^{-1} \tilde{F}_{x_1})_{x_1 \in [0, 1]}, \bar{F})|_{\mathcal{U}}. \end{aligned}$$

La section holonome F est donc aussi proche qu'on le souhaite de F_0 au dessus de $\varphi(\mathcal{U})$.



L'image de A par $h = \varphi \circ \psi$ ($N_1 = 4$ et $N_2 = 20$).

Observons pour finir que $\mathcal{U} = \mathcal{O}p\psi(A)$ et que $\varphi(\mathcal{U}) = \mathcal{O}p\varphi(\psi(A))$. La difféotopie $h^\tau = \varphi^\tau \circ \psi^\tau$ satisfait aux conclusions du théorème.

□

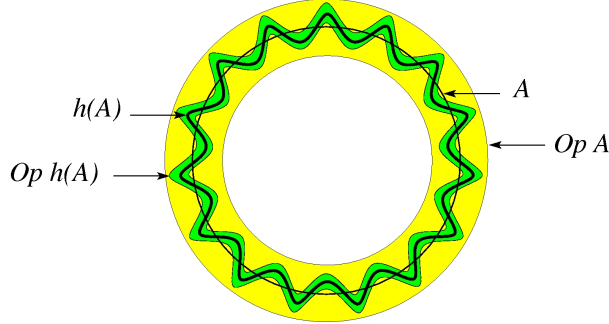
Observation.— Il est facile de généraliser le lemme précédent pour un cube $A = [0, 1]^n$ et d'en fournir une démonstration par récurrence à partir des techniques utilisées pour démontrer le lemme approximation holonome pour le carré. On peut également, mais c'est un peu plus technique, en déduire des versions à bord de ces lemmes. Si $F_0 : \mathcal{O}p A \longrightarrow J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ est holonome sur $\mathcal{O}p \partial A$ alors $F : \mathcal{O}p h(A) \longrightarrow J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ sera identique à F_0 au dessus de $\mathcal{O}p \partial A$ et $h|_{\mathcal{O}p \partial A}^\tau = id|_{\mathcal{O}p \partial A}$ pour tout $\tau \in [0, 1]$.

5 Le théorème d'approximation holonome

Théorème d'approximation holonome (Eliashberg, Mishachev 2001).

— Soit $A \subset M$ une sous-variété de codimension plus grande que 1, et soit $F_0 : \mathcal{O}p A \longrightarrow J^1(M, N)$ une section. Alors, $\forall \delta, \epsilon \in C^0(M, \mathbb{R}_+^*)$, il existe une difféotopie $h^\tau : M \longrightarrow M$ δ -petite ($h^0 = id_M$, $h := h^1$) avec $h^1(A) \subset \mathcal{O}p A$ et une section holonome $F : \mathcal{O}p h(A) \longrightarrow J^1(M, N)$ telle que :

$$\forall p \in \mathcal{O}p h(A), \text{ dist}(F(p), F_0(p)) < \epsilon(p).$$



Observations.— Bien sûr M , N , $J^1(M, N)$ sont munis de métriques afin de donner un sens à *dist*. On peut muscler ce théorème en remplaçant le fibré trivial $M \times N \rightarrow M$ par un fibré $X \rightarrow M$ quelconque. On peut aussi remplacer les 1-jets par des r -jets, $r \in \mathbb{N}^*$. On peut enfin remplacer la sous-variété A par un polyèdre c'est-à-dire un sous-complexe d'une triangulation de M . On peut enfin fournir des versions paramétriques et à bord.

Idée de la démonstration.— On travaille sur les cubes de dimension maximale d'une décomposition en cubes de A et on recolle par des versions à bord du lemme d'approximation holonome au dessus du cube. $\square$

6 Le h -principe pour les relations *Diff*-invariantes

Notons que le groupe des difféomorphismes d'une variété M agit naturellement sur le fibré des 1-jets $J^1(M, N)$. Dans un système de coordonnées locales cette action s'écrit

$$\varphi_*(x, y, L_{(x,y)}) = (\varphi(x), y, L_{(x,y)} \circ d\varphi_{\varphi(x)}^{-1})$$

où $\varphi \in \text{Diff}(M)$.

Définition.— Une relation $\mathcal{R} \subset J^1(M, N)$ est dite *Diff(M)-invariante* si elle est invariante pour l'action naturelle du groupe $\text{Diff}(M)$ sur $J^1(M, N)$.

Exemples.— La relation différentielle des immersions $\mathcal{I} = \text{Mono}(TM, TN) \subset J^1(M, N)$ est *Diff(M)-invariante*. C'est aussi le cas de la relation différentielle des submersions $\mathcal{S} = \text{Epi}(TM, TN)$.

Définition.— Une variété est dite *fermée* si elle est compacte sans bord, elle est dite *ouverte* si aucune de ses composantes connexes n'est fermée. En

particulier une variété connexe dont le bord est non vide est ouverte.

Le théorème d'approximation holonome permet de retrouver un théorème célèbre de Gromov portant sur les relations $Diff(M)$ -invariantes :

Théorème (Gromov, 1969). – *Soit M une variété ouverte, $\mathcal{R} \subset J^1(M, N)$ une relation ouverte et $Diff(M)$ -invariante alors $\mathcal{R}$ satisfait au h -principe paramétrique i.e. l'application*

$$J^1 : Sol(\mathcal{R}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R})$$

est une équivalence d'homotopie.

Démonstration.— Si M une variété ouverte, il existe un polyèdre $A \subset M$ de codimension plus grande que 1, tel que M puisse être compressée par une isotopie $\varphi_t : M \longrightarrow M$ dans un voisinage arbitrairement petit $\mathcal{O}p A$ de A . Soit $F_0 : \mathcal{O}p A \longrightarrow \mathcal{R} \subset J^1(M, N)$, d'après le théorème d'approximation holonome il existe une section holonome $F : \mathcal{O}ph(A) \longrightarrow J^1(M, N)$ arbitrairement proche de F_0 et puisque $\mathcal{R}$ est ouverte, on peut supposer $F : \mathcal{O}ph(A) \longrightarrow \mathcal{R}$. Notons $f : \mathcal{O}ph(A) \longrightarrow N$ l'application telle que $F = j^1 f$. Alors $j^1(f \circ h^{-1})$ est une section $\mathcal{R}$ au dessus de $\mathcal{O}p A$ car $\mathcal{R}$ est $Diff(M)$ -invariante, pour la même raison $f \circ h^{-1} \circ \varphi_1^{-1}$ est une solution de $\mathcal{R}$ définie sur tout M . $\square$

Observation.— La condition d'invariance par le groupe de Lie des difféomorphismes $G = Diff(M)$ peut être assouplie. On peut remplacer G par un sous groupe de Lie $U \subset G$ suffisamment *large* (voir [1], p. 139 ou [2], p. 83 pour une définition et plus de détails). Par exemple, on peut remplacer $Diff(M)$ par la composante de l'identité du groupe des difféomorphismes de contact à support compact ou par le groupe des difféomorphismes hamiltonniens à support compact d'une variété symplectique.

7 Applications

Les techniques développées pour établir le théorème d'approximation holonome sont suffisamment flexibles pour fournir plusieurs variantes du théorème de Gromov. En particulier, elles peuvent s'adapter au cas des relations différentielles invariantes par le groupe des difféomorphismes de contact d'une variété de contact. Une application de cette variante du théorème

de Gromov permet alors d'obtenir le théorème de classification des immersions legendriennes de Gromov-Duchamp et, en conséquence, d'en déduire la classification des immersions lagrangiennes. Ces deux théorèmes seront admis.

Soit α une 1-forme sur une variété N^{2n+1} et $\xi = \ker \alpha$. Rappelons que si $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ est une forme volume sur N^{2n+1} on dit alors que ξ est un champ d'hyperplans de contact et que (N^{2n+1}, ξ) est une variété de contact.

Définition.— Soit (N^{2n+1}, ξ) une variété de contact. Une immersion $f : M^n \longrightarrow N^{2n+1}$ est dite *legendrienne* si $df(TM^n) \subset \xi$ (ou, de façon équivalente, si $f^*\alpha = 0$).

De $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ et $\alpha|_\xi = 0$ on déduit $(d\alpha)|_\xi^n \neq 0$ et donc $\omega := d\alpha|_\xi$ est une forme symplectique sur ξ .

Définition.— Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique. Un n -plan $\Lambda \subset V$ est dit *lagrangien* si $\omega|_\Lambda = 0$.

Si $f : M^n \longrightarrow N^{2n+1}$ est une immersion legendrienne alors $f^*\omega = f^*(d\alpha) = d(f^*\alpha) = 0$, ainsi $df(TM^n)$ est un champ de n -plans lagrangiens de ξ .

Exercice.— On considère la variété de contact $N^{2n+1} = \mathbb{S}^{2n+1}(1) \subset \mathbb{C}^{n+1} = (\mathbb{E}^{2n+2}, J)$ avec $\xi_y := (Jy)^\perp$ pour tout $y \in \mathbb{S}^{2n+1}(1)$. Montrer que

$$\begin{aligned} f : \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / (2\pi\mathbb{Z})^n &\longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}(1) \subset \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C} \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{n+1}} (e^{ix_1}, \dots, e^{ix_n}, e^{-i(x_1 + \dots + x_n)}) \end{aligned}$$

est une immersion legendrienne du tore $\mathbb{T}^n$ dans $\mathbb{S}^{2n+1}(1)$.

Théorème de classification des immersions legendriennes (Gromov 71, Duchamp 84).— *La relation différentielle des immersions legendriennes satisfait au h-principe paramétrique.*

Définition.— Soit (N^{2n}, ω) une variété symplectique. Une immersion $f : M^n \longrightarrow N^{2n}$ est dite *lagrangienne* si $f^*\omega = 0$.

Exercice.— On considère la variété symplectique $N^{2n} = \mathbb{C}^n = (\mathbb{E}^{2n}, J)$

avec $\omega := \langle \cdot, J \cdot \rangle$. Montrer que

$$\begin{aligned} f : \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / (2\pi\mathbb{Z})^n &\longrightarrow \mathbb{S}^{2n-1}(1) \subset \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C} \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{n}} (e^{ix_1}, \dots, e^{ix_n}) \end{aligned}$$

est une immersion lagrangienne du tore $\mathbb{T}^n$ dans $\mathbb{C}^n$.

Théorème de classification des immersions lagrangiennes (Gromov 71, Lees 76).—*La relation différentielle des immersions lagrangiennes satisfait au h -principe paramétrique.*

Un exemple d'application : la classification des immersions lagrangiennes du tore $\mathbb{T}^n$ dans $\mathbb{C}^n$.— Soit $(e_1, \dots, e_n)$ un champ de bases sur $\mathbb{T}^n$ et $f : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ une application. Son 1-jet s'identifie au $(n+2)$ -uplet

$$j^1 f(x) = (x, f(x), df_x(e_1), \dots, df_x(e_n)) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^n.$$

Notons que l'application f est une immersion lagrangienne si et seulement si, pour tout point de $x \in \mathbb{T}^n$, la famille $(df_x(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est libre et

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad \omega(df_x(e_i), df_x(e_j)) = \langle df_x(e_i), Jdf_x(e_j) \rangle = 0,$$

autrement dit si

$$\dim Vect(df_x(e_1), \dots, df_x(e_n)) = n$$

et

$$JVect(df_x(e_1), \dots, df_x(e_n)) = Vect(df_x(e_1), \dots, df_x(e_n))^\perp.$$

Notons W la sous-variété de $(\mathbb{R}^{2n})^n$ définie par

$$W := \{(v_1, \dots, v_n) \in (\mathbb{R}^{2n})^n \mid \dim V = n, JV = V^\perp\}$$

où $V = Vect(v_1, \dots, v_n)$. La relation différentielle des immersions lagrangiennes est le sous-espace

$$\mathcal{R} = \mathbb{T}^n \times \mathbb{C}^n \times W.$$

L'existence d'un h -principe paramétrique indique que la flèche

$$\begin{aligned} j^1 : Sol(\mathcal{R}) = I_{Lag}(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}^n) &\longrightarrow \Gamma(\mathcal{R}) = \Gamma(\mathbb{T}^n \times \mathbb{C}^n \times W) \\ f &\longmapsto j^1 f \end{aligned}$$

est une équivalence d'homotopie. Puisque $j^1 f$ est l'identité sur le premier facteur et que $\mathbb{C}^n$ se contracte en un point, les espaces $\Gamma(\mathbb{T}^n \times \mathbb{C}^n \times W)$ et

$C^0(\mathbb{T}^n, W)$ sont homotopiquement équivalents. De même, W se contracte sur

$$W_0 := \{(v_1, \dots, v_n) \in (\mathbb{R}^{2n})^n \mid (v_1, \dots, v_n) \text{ est orthonormée et } JV = V^\perp\}.$$

Si l'on fixe une $\mathbb{C}$ -base $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ de $\mathbb{C}^n$, on peut alors identifier W_0 avec $U(n)$. Par conséquent $I_{Lag}(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}^n)$ est homotopiquement équivalent à l'espace $C^0(\mathbb{T}^n, U(n))$. En particulier

$$\pi_0(I_{Lag}(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}^n)) \simeq \pi_0(C^0(\mathbb{T}^n, U(n))).$$

Ainsi la classification des immersions lagrangiennes du tore est réduite au problème purement topologique de la classification des applications continues de $\mathbb{T}^n$ dans $U(n)$. Notez que si $n = 1$ on retrouve le théorème de Whitney-Graustein.

Un autre exemple d'application : la classification des immersions legendrienne du tore $\mathbb{T}^n$ dans $\mathbb{S}^{2n+1}(1)$.— Le 1-jet d'une application $f : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}(1) \subset \mathbb{C}^{n+1}$ s'identifie au $(n+2)$ -uplet

$$j^1 f(x) = (x, f(x), df_x(e_1), \dots, df_x(e_n)) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^{2n+1}(1) \times (\mathbb{C}^{n+1})^n.$$

L'application f est une immersion legendrienne si et seulement si, pour tout point de $x \in \mathbb{T}^n$ on a

$$\dim Vect(df_x(e_1), \dots, df_x(e_n)) = n$$

et

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \langle df_x(e_i), Jf(x) \rangle = \langle df_x(e_i), f(x) \rangle = 0.$$

Des arguments proches de ceux présentés pour le cas lagrangien montrent que

$$\pi_0(I_{Leg}(\mathbb{T}^n, \mathbb{S}^{2n+1}(1))) \simeq \pi_0(C^0(\mathbb{T}^n, U(n+1))).$$

References

- [1] Y. ELIAHSBERG ET N. MISHACHEV, *Introduction to the h-principle*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 48, A. M. S., Providence, 2002.
- [2] M. GROMOV, *Partial Differential Relations*, Springer-Verlag, 1986.