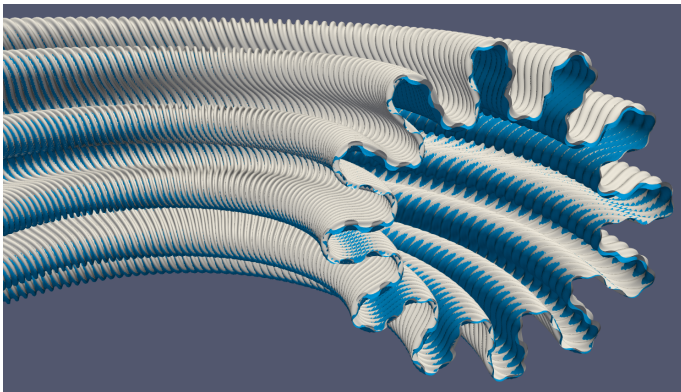


# *H*-Principle and Convex Integration Theory

Vincent Borrelli

Université Lyon 1



# What is Convex Integration Theory ?

A process to solve PDE's/Differential Relations (mostly  
arising from Differential Geometry)

# What is Convex Integration Theory ?

A process to solve PDE's/Differential Relations (mostly  
arising from Differential Geometry)

**AND**

# What is Convex Integration Theory ?

A process to solve PDE's/Differential Relations (mostly  
arising from Differential Geometry)

**AND**

A tool to detect  $h$ -principles

# What is Convex Integration Theory ?

A process to solve PDE's/Differential Relations (mostly  
arising from Differential Geometry)

# What is Convex Integration Theory ?

A process to solve PDE's/Differential Relations (mostly  
arising from Differential Geometry)

**AND**

# What is Convex Integration Theory ?

A process to solve PDE's/Differential Relations (mostly  
arising from Differential Geometry)

**AND**

A tool to detect  $h$ -principles

# What is the $h$ -Principle ?





# What is the *h*-Principle ?



**Problem (~ 1930 until 1960).**— Given two surfaces of  $\mathbb{R}^3$ ,  
is there exist a *regular* homotopy joining them ?

# What is the *h*-Principle ?

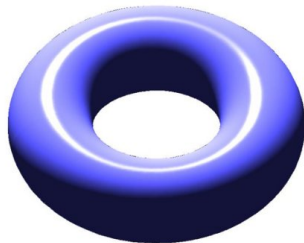
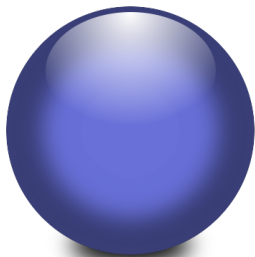


**Problem (~ 1930 until 1960).**— Given two surfaces of  $\mathbb{R}^3$ ,  
is there exist a *regular* homotopy joining them ?

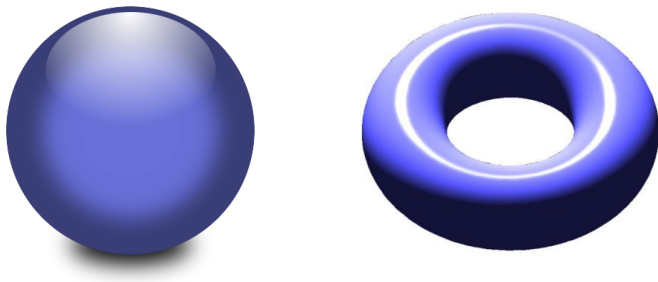
*Regular* means that at each time the surface remains  
smooth (no sharp bend, no crease).

Self-intersections are allowed.

## An example

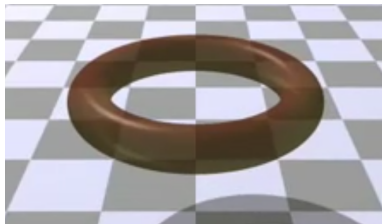
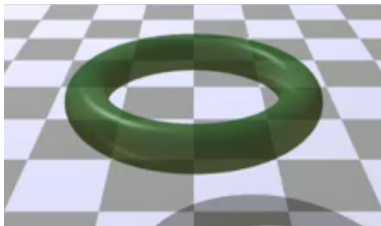


## An example

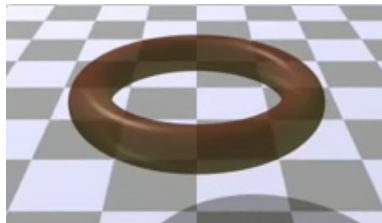
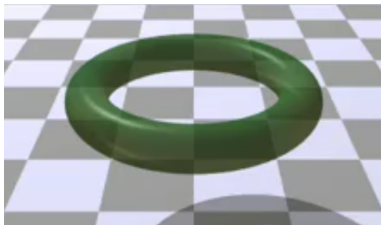


**Obviously impossible.**— There is a topological obstruction !

## Another example



## Another example



VIDEO

## No obstruction !



# What is the $h$ -principle ?



*Mikhail Gromov*

- Informal definition : We say that the  **$h$ -principle** holds on a differential problem if the obstructions to find solutions come from algebraic topology.



# What is the *h*-principle ?



*Mikhail Gromov*

- Informal definition : We say that the ***h*-principle** holds on a differential problem if the obstructions to find solutions come from algebraic topology.
- For instance, the *h*-principle holds on the problem of finding regular homotopies.

# What is the $h$ -principle ?



- The  $h$ -principle holds for numerous problems : in Symplectic/Contact/Riemannian Geometry, in Foliation Theory...

- ◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ ≡ ↺ 🔍 ↻

# General Philosophy of these lectures

- To present Convex Integration Theory in a historical perspective in order to emphasize the key ideas behind its development.

# General Philosophy of these lectures

- To present Convex Integration Theory in a historical perspective in order to emphasize the key ideas behind its development.
- These key ideas were **outrageously simple**... Sometimes, you do not need tons of abstract and conceptual theories to get a breakthrough.

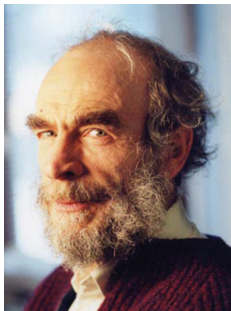
# General Philosophy of these lectures

- To present Convex Integration Theory in a historical perspective in order to emphasize the key ideas behind its development.
- These key ideas were **outrageously simple**... Sometimes, you do not need tons of abstract and conceptual theories to get a breakthrough.
- Lectures on the  $h$ -principle were already given in 2012 on this MA2 with a classical perspective. It is highly recommended to download the pdf notes on my webpage (section "Enseignement"), to take a look at them and possibly to do some of the exercises.



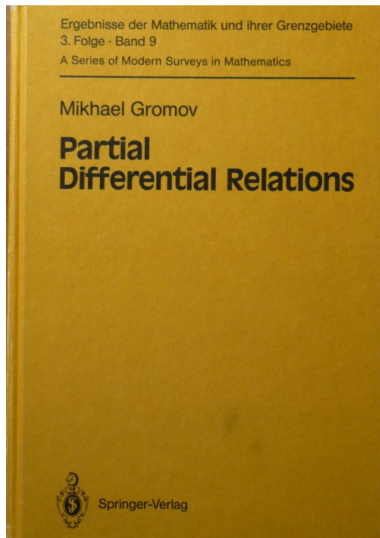
## Content

- L1 : Nash-Kuiper Theorem
- L2 : The Whitney-Graustein Theorem and the  $h$ -Principle
- L3 : 1D Convex Integration
- L4 : Gromov Theorem on Ample Relations
- L5 : Constructions of  $C^1$  isometric maps
- L6 : Theillièrè's Formula



*Mikhail Gromov*

## Bibliography

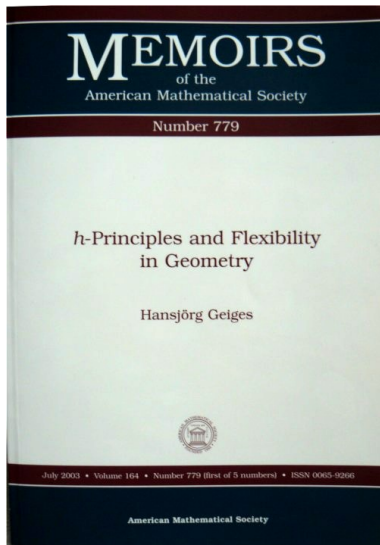






*Hansjörg Geiges*

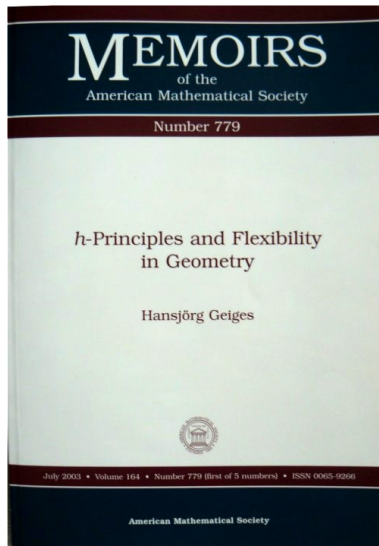
## Bibliography

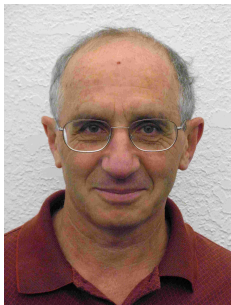




*Hansjörg Geiges et  
Sinem Onaran*

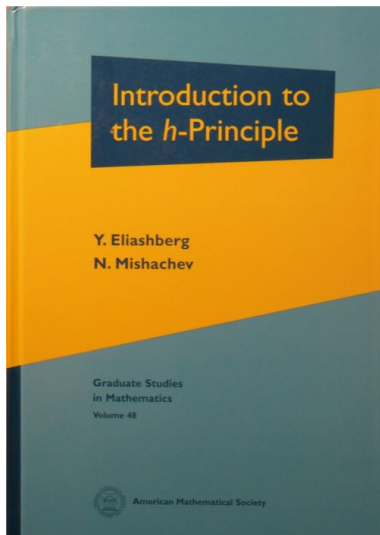
## Bibliography





*Yakov Eliashberg*

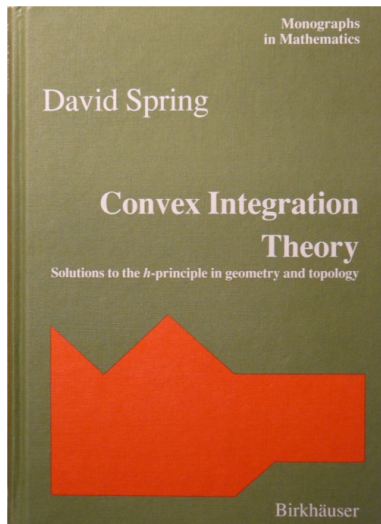
## Bibliography

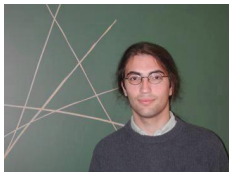




*David Spring*

## Bibliography





Patrick Massot

# Bibliography

[Patrick Massot](#) [Articles](#) [Exposition](#) [Enseignement](#) [Diffusion](#) [Divers](#) [English version](#)

Enseignement

Math 114 : Introduction aux mathématiques formalisées

Il s'agit d'un cours au second semestre de la double licence mathématiques et informatique. Les ressources pour ce cours sont constitué de [notes de cours](#), d'un projet CoCalc et d'une classe WIMS. On pourra aussi consulter le [guide d'installation](#).

Introduction au h-principe de Gromov

J'enseigne un cours avancé du M2 AAG sur le h-principe de Gromov.

Les références principales sont :

- Le livre d'Eliashberg-Mishachev *Introduction to the h-principle*
- Toute note de cours provenant de [Vincent Borrelli](#).
- Le livre de Gromov *Partial differential relations* (difficile)

On peut trouver ici des [notes de cours](#).

**Suggestions d'exposés d'étudiants**

Dans la liste suivante, EM renvoie au livre d'Eliashberg et Mishachev. Les trois premières suggestions sont dans la continuité directe du cours. Les deux dernières sont nettement plus ambitieuses que le reste mais on peut donner une idée de comment les idées du cours peuvent se combiner avec d'autres idées.

- Plongements isosymplectiques EM Thm 12.1.1. Application du théorème d'approximation holonome et géométrie symplectique artisanale.
- Approximation holonome pour les relations microflexibles EM chapitre 13 (voir Thm 13.4.1, bonus 16.1.2). Il s'agit de modifier un peu la démonstration du théorème d'approximation holonome.
- Opérateurs différentiels linéaires d'ordre 1 EM Chap 20. Applications de l'intégration convexe à des opérateurs différentiels tels que la divergence.
- *Avant Thom et le h-principe* Discuter comment cet article démontre l'existence de retournement de la sphère en s'inspirant d'idées de Thom.
- Intégration convexe et EDP Faire un compte-rendu de [ce survol](#).
- Isotopies positives de légendriennes liches Théorème principal de [cet article](#). Continuation du dernier chapitre du cours.
- Legendriennes liches et plastrons Expliquer le théorème 1.1 de [cet article](#). Continuation du dernier chapitre du cours, avec en plus de la géométrie de contact en dimension 3.
- Existence de structures de contact en grande dimension Décrire le début de la démonstration du théorème principal de [cet article](#). Par exemple on peut viser d'expliquer avec cette technologie l'existence de structures de contact sur les variétés fermées de dimension 3. Voir aussi [ce séminaire Bourbaki](#) et les références à d'autres sources qu'il contient à la fin de l'introduction.
- Caractérisation topologique des variétés de Stein Discuter le Thm 1.5 de [ce survol](#) (voir aussi le livre de Cieliebak et Eliashberg si besoin).

*Pdf of the lectures "Introduction to the h-principle" on his web page*

# Bibliography

1 Variétés différentiables	+	<h2>Topologie différentielle</h2> <p>Patrick Massot</p> <p>La topologie différentielle est l'étude des propriétés globales d'espaces localement modélisés sur <math>\mathbb{R}^n</math> en s'appuyant sur le calcul différentiel. Parmi les premiers résultats de cette théorie, le plus célèbre est probablement le théorème de la boule chevelue de Brouwer: il est impossible de peigner continûment une sphère de dimension deux sans faire d'épi.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;">   </div> <p>La sphère de dimension deux est localement constituée de morceaux de plans <math>\mathbb{R}^2</math> déformés. Depuis Riemann, on dit qu'il s'agit d'une variété. Il est bien sûr possible de peigner un plan sans épi donc le théorème de la boule chevelue n'est pas un résultat local. De plus il n'a rien à voir avec la géométrie de la sphère, on peut déformer la sphère sans changer la conclusion : un ballon de rugby n'est pas plus peignable qu'un ballon de football. Par contre il est facile de peigner une bouée. Pour achever de se convaincre de la subtilité de ce théorème, il est instructif de chercher à peigner une boule en ne faisant qu'un seul épi et non deux comme lors de la plupart des premières tentatives.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p>Bernhard Riemann</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Luitzen Brouwer</p> </div> </div>
2 Fibrés	+	
3 Sous-variétés et plongements	+	
4 Transversalité	+	
5 Théorie de Morse	+	
6 Formes différentielles et intégration	+	
7 Cohomologie de de Rham	+	
8 Suites exactes longues en cohomologie	+	
9 Finitude, dualité et produits	+	
10 Intersection en cohomologie de de Rham	+	
A Rappels de topologie	+	
B Rappels de géométrie et calcul différentiel	+	
C Index	+	

*Patrick Massot : lectures on Differential Topology*

Let's work !



We have some *Wrong Way* signs to explode with  $h$ -principle dynamites !