Université Claude Bernard Lyon 1 **PCSI L1 - UE Math 2**

EXAMEN TERMINAL 1 – Mardi 18 mai 2021 – Durée 2h

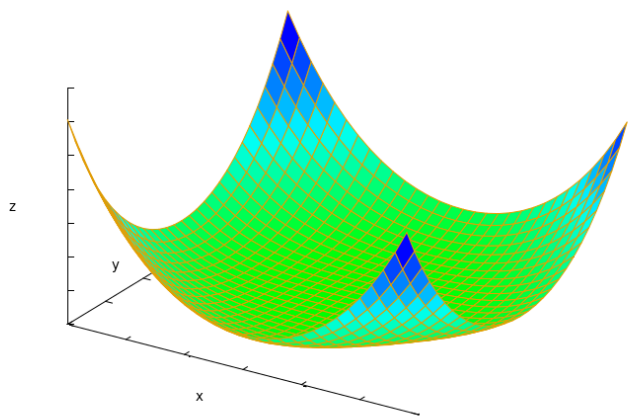
Règlement – Une feuille recto-verso manuscrite de notes est autorisée ainsi que la feuille formulaire *Repères mobiles et champs vectoriels*. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Le barème des exercices est indiqué entre crochets. Les **réponses doivent être justifiées**.

Exercice 1 [4.5 pts] – On considère la fonction de deux variables f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

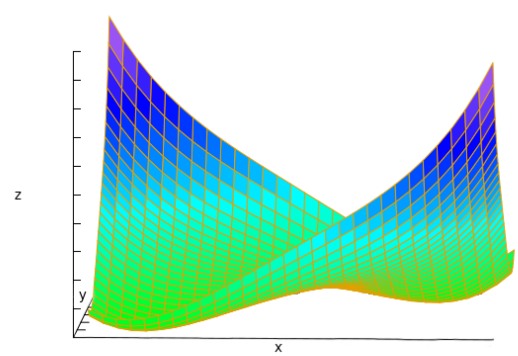
a) [2 pts] Montrer que f possède trois points critiques. Indication : $x^8 = 1$ a pour racines -1 et 1.

b) [1,5 pt] Déterminer la nature de chaque point critique.

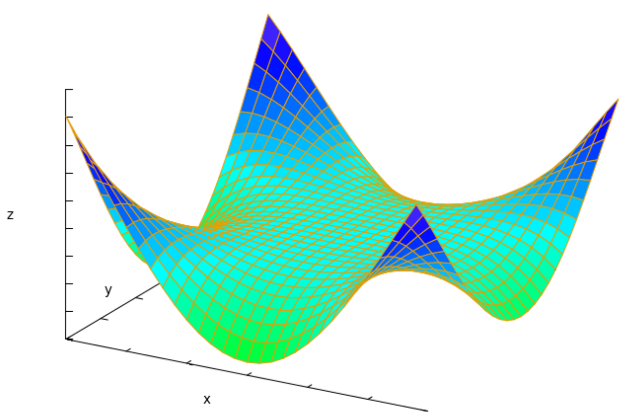
c) [1 pt] Lequel de ces quatre graphes représente celui de la fonction f ? On donnera une justification sommaire.



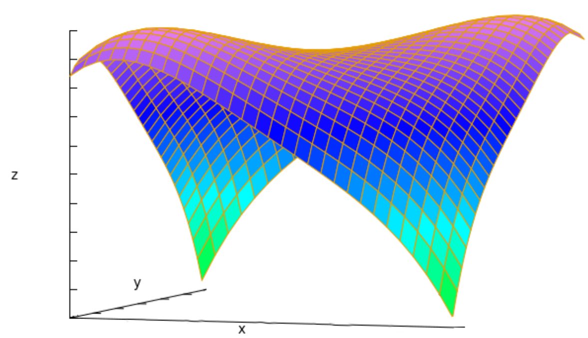
Graphe 1



Graphe 2



Graphe 3



Graphe 4

Exercice 2 [3.5 pts] – On considère la demi-boule

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ 0 \leq z\}$$

ayant pour densité de masse

$$\mu(x,y,z) = 1-(x^2+y^2+z^2).$$

a) [1 pt] Écrire en coordonnées sphériques l'ensemble Ω et la densité de masse μ.

b) [1 pt] Trouver la masse totale de la demi-boule.

c) [1.5 pt] Trouver le barycentre $G(x_G, y_G, z_G)$ de la demi-boule.

Exercice 3 [3.5 pts] – On considère le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y) = x\,\overrightarrow{i} - y\,\overrightarrow{j}$.

a) [1 pt] Dessiner le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ aux points $(\frac{1}{2},4)$, $(1,2)$, $(2,1)$ et $(4,\frac{1}{2})$.

b) [1,5 pt] Trouver l'expression de la ligne de champ $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ passant par le point $(2,1)$.

c) [1 pt] Montrer que la ligne de champ passant par le point $(2,1)$ est une branche d'hyperbole que l'on représentera sur le dessin du a).

Exercice 4 [2 pts] – Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

a) [1 pt] Montrer que $\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) = \Delta f$.

b) [0,5 pt] À partir de a), caractériser un champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ qui est à la fois conservatif et incompressible.

c) [0.5 pt] Le champ $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} f$ avec $f(x,y) = x^2 - y^2$ est-il conservatif et incompressible ?

Exercice 5 [4.5 pts] – On considère les deux champs de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = \cos x\,\vec{\imath} + \cos y\,\vec{\jmath} + \cos z\,\vec{k} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{W}(x,y,z) = -y\,\vec{\imath} - z\,\vec{\jmath} - x\,\vec{k}.$$

a) [1.5 pt] Montrer que l'un de ces deux champ est conservatif puis déterminer un potentiel scalaire ϕ de ce champ.

b) [2 pt] Montrer que l'un de ces deux champs admet un potentiel vecteur puis déterminer un potentiel vecteur de ce champ sous la forme $\overrightarrow{A} = \alpha xy\vec{\imath} + \beta yz\vec{\jmath} + \gamma zx\vec{k}$ où α, β et γ sont des constantes.

c) [0.5 pt] Calculer la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long d'un cercle de centre l'origine, de rayon 1 et contenu dans un plan horizontal.

d) [0.5 pt] Calculer le flux de $\overrightarrow{W}$ au travers de la sphère de centre l'origine et de rayon 1.

Exercice 6 [2 pts] – Calculer le flux du champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = 2x^2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + (1+x^2+y^2+z^2)\,\vec{k}$$

à travers de la surface paramétrée par

$$f(u,v) = (u, u^2, v), \qquad u \in [-1,1],\ v \in [0,1].$$