Université Claude Bernard Lyon 1 **PCSI L1 - UE Math 2**

Contrôle terminal du jeudi 11 mai 2023 – Durée 1h30

Règlement – Une feuille recto-verso manuscrite de notes est autorisée ainsi que la feuille formulaire *Repères mobiles et champs vectoriels*. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Le barème des exercices est indiqué entre crochets. Les **réponses doivent être justifiées**.

Exercice 1 [6 pts] – On considère la fonction de deux variables définie par

$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = \frac{y}{1+x^2}$$

a) [0.5 pt] Donner l'ensemble de définition de f.

b) [1 pt] Donner la nature de la ligne de niveau 0 de f puis de la ligne de niveau 1.

c) [2 pts] Dessiner les lignes de niveau $L_a(f)$ pour $a \in \{-2; -1; 1; 2\}$.

d) [0.5 pt] Déterminer le gradient $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x,y)$ de f et montrer qu'il s'écrit en fonction de

$$\overrightarrow{w}(x,y) = -xy\,\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}(1+x^2)\,\overrightarrow{j}.$$

e) [1 pt] On considère les quatre directions suivantes

$$\overrightarrow{v}_1 = \sqrt{2}\,\overrightarrow{i}, \quad \overrightarrow{v}_2 = \sqrt{2}\,\overrightarrow{j}, \quad \overrightarrow{v}_3 = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \quad \overrightarrow{v}_4 = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}.$$

Laquelle de ces quatre directions donne-t-elle la dérivée directionnelle de f la plus élevée au point $(1,1)$?

f) [1 pt] Pouvait-on prévoir le résultat de la question $e)$? Justifier.

Exercice 2 [6 pts] – On considère la fonction de deux variables définie par

$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = x^2 + x - 3xy + y^3$$

a) [0.5 pt] Donner la matrice jacobienne $J_f(x,y)$ de f.

b) [0.5 pt] Donner la matrice hessienne $H_f(x,y)$ de f.

c) [2 pts] Montrer que f a deux points critiques que l'on déterminera.

d) [1 pt] Déterminer la nature de chaque point critique.

e) [1 pt] On considère l'application $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$t \longmapsto \gamma(t) = (0,t)$$

On note $g = f \circ \gamma$. Faire un dessin du graphe de g.

f) [1pt] L'un des points critiques trouvé en $c)$ est-il un minimum global ou un maximum global de f ? Justifier.

Exercice 3 [2 pts] – On considère la fonction de trois variables $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x,y,z) = 2xy^2 - 4xy + x^2 + z^2 - 2z.$$

a) [1pt] Écrire le développement de Taylor de f à l'ordre 2 et au point $(1,1,1)$.
b) [1pt] Le point $(1,1,1)$ est-il un minimum local de f ? Justifier.

Exercice 4 [6 pts] – Soit $R > 0$. On considère le sous-ensemble Ω de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\, 0 \leq y, 0 \leq z\}$$

et ayant pour densité de masse

$$\mu(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

a) [1pt] Écrire en coordonnées sphériques l'ensemble Ω et la densité de masse μ.
b) [1 pt] Faire un dessin de Ω.
c) [1 pt] La densité μ est-elle constante sur la sphère de centre l'origine et de rayon R ? Est-elle constante sur le plan horizontal $\{z = \frac{R}{2}\}$? Justifier.
d) [1 pt] Déterminer la masse totale M de Ω en fonction de R.
Indication pour le calcul : on rappelle que $(f^2)' = 2ff'$.
e) [2 pts] On note $G(x_G, y_G, z_G)$ le barycentre de Ω. Exprimez y_G en fonction de R. On ne demande pas de déterminer x_G et z_G.
Indication pour le calcul : on rappelle que $(f^3)' = 3f^2f'$.