Université Claude Bernard Lyon 1 **PCSI L1 - UE Math 2**

Corrigé de l'examen terminal 1 – 11 mai 2023 – Durée 1h30

Règlement – Une feuille recto-verso manuscrite de notes est autorisée ainsi que la feuille formulaire *Repères mobiles et champs vectoriels*. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Le barème des exercices est indiqué entre crochets. Les **réponses doivent être justifiées**.

Exercice 1 [6 pts] – On considère la fonction de deux variables définie par

$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = \frac{y}{1+x^2}$$

a) [0.5 pt] Donner l'ensemble de définition de f.

b) [1 pt] Donner la nature de la ligne de niveau 0 de f puis de la ligne de niveau 1.

c) [2 pts] Dessiner les lignes de niveau $L_a(f)$ pour $a \in \{-2;-1;1;2\}$.

d) [0.5 pt] Déterminer le gradient $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y)$ de f et montrer qu'il s'écrit en fonction de

$$\vec{w}(x,y) = -xy\,\vec{i} + \frac{1}{2}(1+x^2)\,\vec{j}.$$

e) [1 pt] On considère les quatre directions suivantes

$$\vec{v}_1 = \sqrt{2}\,\vec{i}, \quad \vec{v}_2 = \sqrt{2}\,\vec{j}, \quad \vec{v}_3 = -\vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{v}_4 = \vec{i} + \vec{j}.$$

Laquelle de ces quatre directions donne-t-elle la dérivée directionnelle de f la plus élevée au point $(1,1)$?

f) [1 pt] Pouvait-on prévoir le résultat de la question e) ? Justifier.

Rép.– a) Le dénominateur est strictement positif, la fonction est définie sur $\mathbb{R}^2$.
b) La ligne de niveau 0 est l'ensemble des (x,y) tels que $f(x,y)=0$, c'est donc la droite $\{y=0\}$, autrement dit, l'axe des abscisses. La ligne de niveau 1 est l'ensemble des points tels que

$$\frac{y}{1+x^2} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad y = 1 + x^2.$$

C'est donc une parabole.
c) Les lignes de niveau $L_a(f)$ avec $a \neq 0$ sont toutes des paraboles et $L_{-a}(f)$ est le symétrique de $L_a(f)$ par rapport à l'axe des abscisses. DESSIN
d) On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\vec{j} \\
&= -\frac{2xy}{(1+x^2)^2}\,\vec{i} + \frac{1}{1+x^2}\,\vec{j} \\
&= \frac{2}{(1+x^2)^2}\left(-xy\,\vec{i} + \frac{1}{2}(1+x^2)\,\vec{j}\right) \\
&= \frac{2}{(1+x^2)^2}\,\vec{w}(x,y).
\end{aligned}$$

e) D'après la question précédente, ou au moyen d'un calcul direct, on a

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(1,1) = \frac{1}{2}\vec{w}(1,1) = \frac{1}{2}\vec{v}_3.$$

On en déduit que pour tout $j \in \{1,2,3,4\}$ on a

$$df_{(1,1)}(\vec{v}_j) = \frac{1}{2}\langle \vec{v}_3, \vec{v}_j\rangle$$

d'où

$$df_{(1,1)}(\overrightarrow{v}_1) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad df_{(1,1)}(\overrightarrow{v}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad df_{(1,1)}(\overrightarrow{v}_3) = 1, \quad df_{(1,1)}(\overrightarrow{v}_4) = 0.$$

La dérivée directionnelle la plus élevée est donnée par la direction $\overrightarrow{v}_3$.

f) Parmi tous les vecteurs de même norme, celui donnant la valeur la plus élevée de la dérivée directionnelle est celui qui est proportionnel au vecteur gradient, d'une proportion positive. Ici, les quatre vecteurs $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_4$ sont de même norme et le vecteur $\overrightarrow{v}_3$ est proportionnel au gradient, d'une proportion positive. C'est donc lui qui donne la valeur la plus élevée de la dérivée directionnelle.

Exercice 2 [6 pts] – On considère la fonction de deux variables définie par

$$(x, y) \longmapsto f(x, y) = x^2 + x - 3xy + y^3$$

a) [0.5 pt] Donner la matrice jacobienne $J_f(x, y)$ de f.

b) [0.5 pt] Donner la matrice hessienne $H_f(x, y)$ de f.

c) [2 pts] Montrer que f a deux points critiques que l'on déterminera.

d) [1 pt] Déterminer la nature de chaque point critique.

e) [1 pt] On considère l'application $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$t \longmapsto \gamma(t) = (0, t)$$

On note $g = f \circ \gamma$. Faire un dessin du graphe de g.

f) [1pt] L'un des points critiques trouvé en c) est-il un minimum global ou un maximum global de f ? Justifier.

Rép.– a) et b) On a

$$J_f(x, y) = (2x + 1 - 3y, -3x + 3y^2)$$

et

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

c) Un point (x, y) est critique pour f si est seulement si la matrice jacobienne de f en ce point est nulle. Or

$$J_f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} 2x + 1 - 3y &= 0 \\ -3x + 3y^2 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y^2 - 3y + 1 &= 0 \\ x &= y^2 \end{cases}$$

Le polynôme $2y^2 - 3y + 1$ a pour discriminant $\Delta = 9 - 4.2.1 = 1$, ses racines sont $y_1 = \frac{3+1}{4} = 1$ et $y_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$J_f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} y &= 1 \\ x &= 1^2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y &= \frac{1}{2} \\ x &= \frac{1}{4} \end{cases}$$

Ainsi f admet deux points critiques $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ et $(1, 1)$.

d) Calculons les matrices hessiennes aux deux points critiques.

$$H_f(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Puisque d'une part $det\, H_f(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) = -3 < 0$ le point $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ est un point selle, et d'autre part $det\, H_f(1, 1) = 3 > 0$ et $tr\, H_f(1, 1) = 9 > 0$, le point $(1, 1)$ est un minimum local.

e) On a $g(t) = f(0, t) = t^3$. Le graphe de g est celui de la cubique $t \to t^3$.

f) Puisque $\lim_{t \to +\infty} t^3 = +\infty$ et $\lim_{t \to -\infty} t^3 = -\infty$, la fonction g n'admet ni maximum local ni minimum local. Il s'en suit que la fonction f n'admet pas non plus de maximum local ou de minimum local.

Exercice 3 [2 pts] – On considère la fonction de trois variables $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x, y, z) = 2xy^2 - 4xy + x^2 + z^2 - 2z.$$

a) [1pt] Écrire le développement de Taylor de f à l'ordre 2 et au point $(1,1,1)$.
b) [1pt] Le point $(1,1,1)$ est-il un minimum local de f ? Justifier.

Rép.– a) On a

$$J_f(x,y,z) = (2y^2 - 4y + 2x, 4xy - 4x, 2z - 2) \quad \text{et} \quad H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 4y-4 & 0 \\ 4y-4 & 4x & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

d'où

$$J_f(1,1,1) = (0,0,0) \quad \text{et} \quad H_f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Le développement de Taylor à l'ordre 2 en $(1,1,1)$ est donc

$$f(x,y,z) = f(1,1,1) + (x-1)^2 + 2(y-1)^2 + (z-1)^2 + o((x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2)$$

avec $f(1,1,1) = -2$.
b) Puisque $J_f(1,1,1) = (0,0,0)$ le point $(1,1,1)$ est un extremum de f. Le terme à l'ordre 2 du développement de Taylor est une somme de carrés, le point $(1,1,1)$ est donc un minimum local de f.

Exercice 4 [6 pts] – Soit $R > 0$. On considère le sous-ensemble Ω de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ 0 \leq y, 0 \leq z\}$$

et ayant pour densité de masse

$$\mu(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

a) [1pt] Écrire en coordonnées sphériques l'ensemble Ω et la densité de masse μ.
b) [1 pt] Faire un dessin de Ω.
c) [1 pt] La densité μ est-elle constante sur la sphère de centre l'origine et de rayon R ? Est-elle constante sur le plan horizontal $\{z = \frac{R}{2}\}$? Justifier.
d) [1 pt] Déterminer la masse totale M de Ω en fonction de R.
Indication pour le calcul : on rappelle que $(f^2)' = 2ff'$.
e) [2 pts] On note $G(x_G, y_G, z_G)$ le barycentre de Ω. Exprimez y_G en fonction de R. On ne demande pas de déterminer x_G et z_G.
Indication pour le calcul : on rappelle que $(f^3)' = 3f^2 f'$.

Rép.– a) En passant en coordonnées sphériques, on trouve directement

$$\Omega = \{(r,\theta,\varphi) \mid 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\} \quad \text{et} \quad \mu(r,\theta,\varphi) = \cos\theta.$$

b) L'ensemble Ω est un quart de sphère pleine de rayon R.
c) Sur la sphère de rayon R, la densité μ a pour expression

$$\mu(x,y,z) = \frac{z}{R}$$

avec $z \in [-R,R]$, elle n'est donc pas constante. Sur le plan $\{z = \frac{R}{2}\}$ la densité s'écrit

$$\mu(x,y,\frac{R}{2}) = \frac{R}{2\sqrt{x^2+y^2+R^2/4}}$$

En particulier $\mu(0,0,\frac{R}{2}) = 1$ et $\mu(\frac{R}{2},0,\frac{R}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, elle n'est donc pas constante.
d) Par définition

$$M = \iiint_\Omega \mu(x,y,z)dxdydz$$

ainsi en passant en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned}
M &= \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\varphi=0}^{\pi}\cos\theta\sin\theta r^2 d\varphi d\theta dr\\
&= \pi\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta r^2 d\theta dr\\
&= \pi\int_{r=0}^{R}\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} r^2 dr\\
&= \frac{\pi}{2}\int_{r=0}^{R} r^2 dr\\
&= \frac{\pi}{2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{R}\\
&= \frac{\pi R^3}{6}
\end{aligned}$$

e) La coordonnée y_G est donnée par l'expression

$$y_G = \frac{1}{M}\iiint_{\Omega} y\mu(x,y,z)dxdydz$$

ainsi en en passant en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned}
y_G &= \frac{1}{M}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\varphi=0}^{\pi} r\sin\theta\sin\varphi\cos\theta\sin\theta r^2 d\varphi d\theta dr\\
&= \frac{1}{M}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\varphi=0}^{\pi}\sin\varphi\cos\theta\sin^2\theta r^3 d\varphi d\theta dr\\
&= \frac{1}{M}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}[-\cos\varphi]_0^{\pi}\cos\theta\sin^2\theta r^3 d\theta dr\\
&= \frac{2}{M}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^2\theta r^3 d\theta dr.
\end{aligned}$$

On poursuit le calcul en utilisant le fait que $(\sin^3\theta)' = 3\cos\theta\sin^2\theta$ ainsi

$$\begin{aligned}
y_G &= \frac{2}{M}\int_{r=0}^{R}\left[\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 dr.\\
&= \frac{2}{3M}\int_{r=0}^{R} r^3 dr.\\
&= \frac{2}{3M}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{R}\\
&= \frac{R^4}{6M}.
\end{aligned}$$

Puisque $M = \frac{\pi R^3}{6}$ on obtient $y_G = \frac{R}{\pi}$.