Université Claude Bernard Lyon 1 **PCSI L1 - UE Math. Complémentaires**

Contrôle terminal du jeudi 11 mai 2023 - durée 1h30

Règlement – Une feuille recto-verso manuscrite de notes est autorisée ainsi que la feuille formulaire *Repères mobiles et champs vectoriels*. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Le barème des exercices est indiqué entre crochets. Les **réponses doivent être justifiées**.

Exercice 1 **[6 pts]** – On considère le champ de vecteurs $\overrightarrow{U}$ défini en coordonnées cylindriques par

$$\overrightarrow{U}(\rho,\varphi,z) = \rho\,\overrightarrow{e_\varphi}.$$

a) [1 pt] Montrer que le rotationnel $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U}$ de $\overrightarrow{U}$ est un champ constant.
b) [0.5 pt] Le champ $\overrightarrow{U}$ est-il un champ de gradient ? Justifier.
c) [1 pt] Soit $R > 0$. On considère le chemin $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ donné en coordonnées cartésiennes par $\gamma(t) = (R\cos\varphi(t), R\sin\varphi(t), 0)$ avec $\varphi(t) = t$. Montrer que $\overrightarrow{\gamma}'(t) = R\overrightarrow{e_\varphi}(t)$.
d) [1 pt] Calculer la circulation $\mathcal{C}_\gamma(\overrightarrow{U})$ de $\overrightarrow{U}$ le long du chemin γ.
e) [1 pt] On considère la demi-sphère

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 = R^2, z \geq 0\}$$

que l'on oriente avec la normale sortante. Calculer le flux $\Phi_S(\overrightarrow{V})$ du champ $\overrightarrow{V}$ au travers de S.
f) [1.5 pt] Écrire le champ $\overrightarrow{U}$ en coordonnées cartésiennes. Sur quel ensemble est-il défini ? Cet ensemble est-il simplement connexe ?

Exercice 2 **[5.5 pts]** – On considère les deux champs de vecteurs $\overrightarrow{V}_1$ et $\overrightarrow{V}_2$ définis sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\overrightarrow{V}_1(x,y,z) = e^y\sin x\,\overrightarrow{i} + e^x\cos y\,\overrightarrow{j} + h(z)\,\overrightarrow{k}, \quad \overrightarrow{V}_2(x,y,z) = e^x\sin y\,\overrightarrow{i} + e^x\cos y\,\overrightarrow{j} + h(z)\,\overrightarrow{k}$$

où $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable.

a) [1.5 pt] Montrer que l'un des deux champs est un champ de gradient.
b) [1 pt] On désigne par $\overrightarrow{V}$ le champ de vecteurs dont le rotationnel est nul. Déterminer un potentiel scalaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de $\overrightarrow{V}$ (on notera H une primitive de h).
c) [1 pt] Exprimer en fonction de H la circulation $\mathcal{C}_\gamma(\overrightarrow{V})$ de $\overrightarrow{V}$ le long du chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\gamma(t) = (1, \pi t, t).$$

d) [0,5 pt] Le champ $\overrightarrow{V}$ est-il incompressible ?
e) [1.5 pt] On note C le cube $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ et S la surface de ce cube orientée avec la normale sortante. Calculer le flux $\Phi_S(\overrightarrow{V})$ de $\overrightarrow{V}$ à travers S.

Exercice 3 **[5 pts]** – On considère le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ défini par

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = (f(y) - f(z))\vec{\imath} + (f(z) - f(x))\vec{\jmath} + (f(x) - f(y))\vec{k}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable.

a) [1 pt] Le champ $\overrightarrow{V}$ est-il incompressible ? Justifier.

b) [1 pt] Le champ $\overrightarrow{V}$ admet-il un potentiel vectoriel ? Justifier.

c) [2 pts] On désigne par F une primitive de f. Trouver un potentiel vecteur

$$\overrightarrow{U} = U_x\vec{\imath} + U_y\vec{\jmath} + U_z\vec{k}$$

de $\overrightarrow{V}$ en fonction de F. *Indication.–* Prendre $U_z(x, y, z) = F(x) + F(y)$.

d) [1 pt] Soit S la sphère unité

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

orientée avec la normale sortante. Déterminer le flux $\Phi_S(\overrightarrow{V})$ de $\overrightarrow{V}$ à travers S.

Exercice 4 [3.5 pts] – On considère le champ de vecteurs $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$ où $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2)$.

a) [1 pt] Dessiner le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ aux neuf points $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\pm\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ et $(0, 0)$.

b) [0.5 pt] On considère une ligne de champ $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ de $\overrightarrow{V}$. Écrire les deux équations différentielles du premier ordre satisfaites par $x(t)$ et $y(t)$ (on ne demande pas de les résoudre).

c) [1 pt] Soit (x_0, y_0) un point du plan. On considère les deux courbes paramétrées suivantes

$$\gamma_1(t) = (x_0 + t, y_0 + t) \quad \text{et} \quad \gamma_2(t) = \left(\frac{1}{2}(y_0 - x_0) + \frac{1}{2}(x_0 + y_0)e^{2t}, \frac{1}{2}(x_0 - y_0) + \frac{1}{2}(x_0 + y_0)e^{2t}\right).$$

Dire pour chacune des deux courbes γ_1 et γ_2 si elles sont des lignes de champ de $\overrightarrow{V}$? On justifiera sa réponse.

d) [1 pt] On prend $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Tracer les points $\gamma_2(0)$, $\gamma_2(1/4)$ et $\gamma_2(1/2)$. À votre avis, quelle est la nature de la trajectoire de γ_2 ? *Valeurs numériques :* $e^{1/2} = 1,64...$ et $e = 2,71...$