Corrigé de l'examen final du jeudi 11 mai 2023

Règlement – Une feuille recto-verso manuscrite de notes est autorisée ainsi que la feuille formulaire *Repères mobiles et champs vectoriels*. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Le barème des exercices est indiqué entre crochets. Les **réponses doivent être justifiées**.

Exercice 1 [6 pts] – On considère le champ de vecteurs $\overrightarrow{U}$ défini en coordonnées cylindriques par

$$\overrightarrow{U}(\rho, \varphi, z) = \rho\,\overrightarrow{e_\varphi}.$$

a) [1 pt] Montrer que le rotationnel $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U}$ de $\overrightarrow{U}$ est un champ constant.

b) [0.5 pt] Le champ $\overrightarrow{U}$ est-il un champ de gradient ? Justifier.

c) [1 pt] Soit $R > 0$. On considère le chemin $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ donné en coordonnées cartésiennes par $\gamma(t) = (R\cos\varphi(t), R\sin\varphi(t), 0)$ avec $\varphi(t) = t$. Montrer que $\overrightarrow{\gamma}'(t) = R\overrightarrow{e_\varphi}(t)$.

d) [1 pt] Calculer la circulation $\mathcal{C}_\gamma(\overrightarrow{U})$ de $\overrightarrow{U}$ le long du chemin γ.

e) [1 pt] On considère la demi-sphère

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$$

que l'on oriente avec la normale sortante. Calculer le flux $\Phi_S(\overrightarrow{V})$ du champ $\overrightarrow{V}$ au travers de S.

f) [1.5 pt] Écrire le champ $\overrightarrow{U}$ en coordonnées cartésiennes. Sur quel ensemble est-il défini ? Cet ensemble est-il simplement connexe ?

Rép.– a) Pour le calcul du rotationnel on utilise son expression en coordonnées cylindriques donnée dans le formulaire :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial U_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial U_\varphi}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_\rho} + \left(\frac{\partial U_\rho}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial \rho}\right)\overrightarrow{e_\varphi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho U_\varphi) - \frac{\partial U_\rho}{\partial \varphi}\right)\overrightarrow{k}.$$

Ici $U_\rho = U_z = 0$ et $U_\varphi = \rho$ d'où

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho U_\varphi)\right)\overrightarrow{k} = 2\,\overrightarrow{k}.$$

Le rotationnel de $\overrightarrow{U}$ est donc un champ constant.

b) Puisque $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U} \neq \overrightarrow{O}$ le champ $\overrightarrow{U}$ n'est pas un champ de gradient.

c) On a

$$\overrightarrow{\gamma}'(t) = -R\sin t\,\overrightarrow{i} + R\cos t\,\overrightarrow{j} = R(-\sin t\,\overrightarrow{i} + \cos t\,\overrightarrow{j}) = R\overrightarrow{e_\varphi}.$$

d) D'après les questions précédentes

$$\langle \overrightarrow{U}(\gamma(t)), \overrightarrow{\gamma}'(t)\rangle = \langle R\overrightarrow{e_\varphi}, R\overrightarrow{e_\varphi}\rangle = R^2.$$

Ainsi

$$\mathcal{C}_\gamma(\overrightarrow{U}) = \int_0^{2\pi} \langle \overrightarrow{U}(\gamma(t)), \overrightarrow{\gamma}'(t)\rangle dt = \int_0^{2\pi} R^2 dt = 2\pi R^2.$$

e) Puisque $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U}$, le théorème de Stokes-Ampère énonce que $\Phi_S(\overrightarrow{V}) = \mathcal{C}_\gamma(\overrightarrow{U})$ et d'après la question précédente $\Phi_S(\overrightarrow{V}) = 2\pi R^2$.

f) On a

$$\rho\,\overrightarrow{e_\varphi} = \sqrt{x^2 + y^2}(-\sin\varphi\vec{\imath} + \cos\varphi\vec{\jmath}) = -y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$$

ainsi $\overrightarrow{U}(x, y, z) = -y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$ est défini sur $\mathbb{R}^3$ qui est simplement connexe d'après le cours.

Exercice 2 [5.5 pts] – On considère les deux champs de vecteurs $\overrightarrow{V}_1$ et $\overrightarrow{V}_2$ définis sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\overrightarrow{V}_1(x, y, z) = e^y \sin x\,\overrightarrow{i} + e^x \cos y\,\overrightarrow{j} + h(z)\,\overrightarrow{k}, \quad \overrightarrow{V}_2(x, y, z) = e^x \sin y\,\overrightarrow{i} + e^x \cos y\,\overrightarrow{j} + h(z)\,\overrightarrow{k}$$

où $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable.

a) [1.5 pt] Montrer que l'un des deux champs est un champ de gradient.

b) [1 pt] On désigne par $\overrightarrow{V}$ le champ de vecteurs dont le rotationnel est nul. Déterminer un potentiel scalaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de $\overrightarrow{V}$ (on notera H une primitive de h).

c) [1 pt] Exprimer en fonction de H la circulation $\mathcal{C}_\gamma(\overrightarrow{V})$ de $\overrightarrow{V}$ le long du chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\gamma(t) = (1, \pi t, t).$$

d) [0,5 pt] Le champ $\overrightarrow{V}$ est-il incompressible ?

e) [1.5 pt] On note C le cube $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ et S la surface de ce cube orientée avec la normale sortante. Calculer le flux $\Phi_S(\overrightarrow{V})$ de $\overrightarrow{V}$ à travers S.

Rép.– a) Le calcul du rotationnel de $\overrightarrow{V_1}$ donne

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} e^y \sin x \\ e^x \cos y \\ h(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^x \cos y - e^y \sin x \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}.$$

Le champ $\overrightarrow{V_1}$ n'est donc pas un champ de gradient. En revanche

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} e^x \sin y \\ e^x \cos y \\ h(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0}.$$

Puisque le champ $\overrightarrow{V_2}$ est défini sur $\mathbb{R}^3$ qui est simplement connexe, le lemme de Poincaré permet d'affirmer que $\overrightarrow{V_2}$ est un champ de gradient.

b) On doit résoudre $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$ c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & e^x \sin y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & e^x \cos y \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} & = & h(z) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} f(x,y,z) & = & e^x \sin y + C_1(y,z) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & e^x \cos y \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} & = & h(z) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} f(x,y,z) & = & e^x \sin y + C_1(y,z) \\ e^x \cos y + \dfrac{\partial C_1}{\partial y} & = & e^x \cos y \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} & = & h(z) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} f(x,y,z) & = & e^x \sin y + C_1(y,z) \\ C_1(y,z) & = & C_1(z) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} & = & h(z) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} f(x,y,z) & = & e^x \sin y + C_1(y,z) \\ C_1(y,z) & = & C_1(z) \\ 0 + \dfrac{\partial C_1}{\partial z} & = & h(z) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} f(x,y,z) & = & e^x \sin y + C_1(y,z) \\ C_1(y,z) & = & C_1(z) \\ C_1(z) & = & H(z) \end{array}\right.$$

Ainsi, les potentiels scalaires de $\overrightarrow{V}$ sont les fonctions

$$f(x,y,z) = e^x \sin y + H(z)$$

où H est une primitive de h.

c) Puisque $\overrightarrow{V}$ est un champ de gradient on a

$$\mathcal{C}_\gamma(\overrightarrow{V}) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)).$$

Or $f(\gamma(1)) = f(1,\pi,1) = e^1 \sin\pi + H(1) = H(1)$ et $f(\gamma(0)) = f(1,0,0) = e^1 \sin 0 + H(0) = H(0)$. Ainsi $\mathcal{C}_\gamma(\overrightarrow{V}) = H(1) - H(0)$.

d) Le calcul de la divergence de $\overrightarrow{V}$ donne

$$\text{div}\,\overrightarrow{V} = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y) + \frac{\partial}{\partial y}(e^x \cos y) + \frac{\partial}{\partial z}(h(z)) = e^x \sin y - e^x \sin y + h'(z) = h'(z).$$

Le champ $\overrightarrow{V}$ est incompressible si et seulement si h est une fonction constante.

e) Le théorème d'Ostrogradski affirme que

$$\Phi_S(\overrightarrow{V}) = \iiint_C \text{div}\,\overrightarrow{V}\, dxdydz$$

ainsi

$$\Phi_S(\overrightarrow{V}) = \iiint_{[0,1]^3} h'(z) dxdydz = h(1) - h(0).$$

Exercice 3 [5 pts] – On considère le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ défini par

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = (f(y)-f(z))\vec{\imath} + (f(z)-f(x))\vec{\jmath} + (f(x)-f(y))\vec{k}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable.

a) [1 pt] Le champ $\overrightarrow{V}$ est-il incompressible ? Justifier.

b) [1 pt] Le champ $\overrightarrow{V}$ admet-il un potentiel vectoriel ? Justifier.

c) [2 pts] On désigne par F une primitive de f. Trouver un potentiel vecteur

$$\overrightarrow{U} = U_x\vec{\imath} + U_y\vec{\jmath} + U_z\vec{k}$$

de $\overrightarrow{V}$ en fonction de F. *Indication.*– Prendre $U_z(x,y,z) = F(x) + F(y)$.

d) [1 pt] Soit S la sphère unité

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1$$

orientée avec la normale sortante. Déterminer le flux $\Phi_S(\overrightarrow{V})$ de $\overrightarrow{V}$ à travers S.

Rép.– a) On a

$$\operatorname{div}\overrightarrow{V} = \frac{\partial}{\partial x}(f(y)-f(z)) + \frac{\partial}{\partial y}(f(z)-f(x)) + \frac{\partial}{\partial z}(f(x)-f(y)) = 0+0+0.$$

Le champ $\overrightarrow{V}$ est donc incompressible.
b) Le champ $\overrightarrow{V}$ est défini sur $\mathbb{R}^3$ car f est définie sur $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{R}^3$ étant contractile, le lemme de Poincaré permet d'affirmer que $\overrightarrow{V}$ est admet un potentiel vecteur.
c) On cherche à résoudre

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(y)-f(z) \\ f(z)-f(x) \\ f(x)-f(y) \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial U_z}{\partial y} - \dfrac{\partial U_y}{\partial z} & = & f(y)-f(z) \\ \dfrac{\partial U_x}{\partial z} - \dfrac{\partial U_z}{\partial x} & = & f(z)-f(x) \\ \dfrac{\partial U_y}{\partial x} - \dfrac{\partial U_x}{\partial y} & = & f(x)-f(y) \end{array}\right.$$

Comme indiqué dans l'énoncé, on prend $U_z(x,y,z) = F(x)+F(y)$. On obtient alors

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(y) - \dfrac{\partial U_y}{\partial z} & = & f(y)-f(z) \\ \dfrac{\partial U_x}{\partial z} - f(x) & = & f(z)-f(x) \\ \dfrac{\partial U_y}{\partial x} - \dfrac{\partial U_x}{\partial y} & = & f(x)-f(y) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial U_y}{\partial z} & = & f(z) \\ \dfrac{\partial U_x}{\partial z} & = & f(z) \\ \dfrac{\partial U_y}{\partial x} - \dfrac{\partial U_x}{\partial y} & = & f(x)-f(y) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} U_y(x,y,z) & = & F(z)+C_y(x,y) \\ U_x(x,y,z) & = & F(z)+C_x(x,y) \\ \dfrac{\partial U_y}{\partial x} - \dfrac{\partial U_x}{\partial y} & = & f(x)-f(y) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} U_y(x,y,z) & = & F(z)+C_y(x,y) \\ U_x(x,y,z) & = & F(z)+C_x(x,y) \\ \dfrac{\partial C_y}{\partial x} - \dfrac{\partial C_x}{\partial y} & = & f(x)-f(y) \end{array}\right.$$

Une solution possible pour la troisième équation est de prendre

$$C_y(x,y) = F(x) \quad \text{et} \quad C_x(x,y) = F(y).$$

Un potentiel vecteur pour $\overrightarrow{V}$ est donc

$$\overrightarrow{U} = (F(z)+F(y))\vec{\imath} + (F(x)+F(z))\vec{\jmath} + (F(y)+F(x))\vec{k}.$$

Les autres potentiels vecteurs diffèrent d'un champ de gradient.
d) Puisque la surface est fermée ($\partial S = \emptyset$) et que le champ $\overrightarrow{V}$ est rotationnel, d'après le théorème d'Ampère-Stokes son flux à travers S est nul.

Exercice 4 [3.5 pts] – On considère le champ de vecteurs $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\,f$ où $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+2xy+y^2)$.

a) [1 pt] Dessiner le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ aux neuf points $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\pm\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ et $(0,0)$.

b) [0.5 pt] On considère une ligne de champ $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ de $\overrightarrow{V}$. Écrire les deux équations différentielles du premier ordre satisfaites par $x(t)$ et $y(t)$ (on ne demande pas de les résoudre).

c) [1 pt] Soit (x_0, y_0) un point du plan. On considère les deux courbes paramétrées suivantes

$$\gamma_1(t) = (x_0 + t, y_0 + t) \quad \text{et} \quad \gamma_2(t) = \left(\frac{1}{2}(y_0 - x_0) + \frac{1}{2}(x_0 + y_0)e^{2t}, \frac{1}{2}(x_0 - y_0) + \frac{1}{2}(x_0 + y_0)e^{2t}\right).$$

Dire pour chacune des deux courbes γ_1 et γ_2 si elles sont des lignes de champ de $\overrightarrow{V}$? On justifiera sa réponse.

d) [1 pt] On prend $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Tracer les points $\gamma_2(0)$, $\gamma_2(1/4)$ et $\gamma_2(1/2)$. À votre avis, quelle est la nature de la trajectoire de γ_2 ? *Valeurs numériques :* $e^{1/2} = 1,64...$ et $e = 2,71...$

Rép.– a) On a $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x, y) = (x + y)(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$. Le champ est donc constant sur les droite $x + y = Cte$. Il est nul sur la droite $y + x = 0$.

b) Si γ est une ligne de champ, il satisfait à l'équation $\overrightarrow{\gamma}'(t) = \overrightarrow{V}(\gamma(t))$ qui s'écrit ici

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) + y(t) \\ y'(t) &= x(t) + y(t). \end{cases}$$

c) La courbe paramétrée γ_1 ne vérifie pas les équations des lignes de champ de $\overrightarrow{V}$. En effet $x'(t) = 1$ et $y'(t) = 1$ ne sont pas égaux à $x(t) + y(t) = x_0 + y_0 + 2t$. La courbe γ_1 n'est donc pas une ligne de champ. Concernant la courbe γ_2, on a

$$x'(t) = (x_0 + y_0)e^{2t}, \quad y'(t) = (x_0 + y_0)e^{2t} \quad \text{et} \quad x(t) + y(t) = (x_0 + y_0)e^{2t}$$

par conséquent γ_2 est une ligne de champ de $\overrightarrow{V}$. Elle passe par le point (x_0, y_0) au temps $t = 0$.

d) La trajectoire de γ_2 est un rayon partant du point $(1, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$. Ce rayon est parcouru à vitesse exponentielle.