Université Claude Bernard Lyon 1 **PCSI L1 - UE Math 2**

Examen terminal 1 du mardi 30 avril 2024 - durée 1h

Règlement – Une feuille recto-verso manuscrite de notes est autorisée ainsi que la feuille formulaire *Repères mobiles et champs vectoriels*. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Le barème des exercices est indiqué entre crochets. Les **réponses doivent être justifiées**.

Exercice 1 [12 pts] – On considère la fonction de deux variables définie par

$$(x, y) \longmapsto f(x, y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$$

1) [0.5 pt] Donner l'ensemble D de définition de f.
2) [1 pt] Montrer que $L_0(f)$, la ligne de niveau 0, est réduite à un point que l'on déterminera.
3) [0.5 pt] Le point $(1, 1)$ fait-il partie de $L_1(f)$, la ligne de niveau 1 de f ?
4) [1 pt] Déterminer le gradient $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x, y)$ au point $(1, 1)$.
   Indication pour le calcul : On rappelle que $(u^2)' = 2u'u$.
5) [2.5 pts] Parmi les trois directions ci-dessous, laquelle donne la pente la plus forte au point $(1, 1)$?

$$\vec{v_1} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}, \quad \vec{v_2} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}, \quad \vec{v_3} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}.$$

   Laquelle de ces directions est tangente à la ligne de niveau $L_1(f)$ au point $(1, 1)$?
6) [2 pts] Montrer que f a deux points critiques que l'on déterminera.
7) [1.5 pts] Donner la matrice hessienne $H_f(x, y)$ de f.
8) [1 pt] Déterminer la nature de chaque point critique.
9) [1 pt] On considère l'application $g = f \circ \gamma$ où

$$\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & D \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t)) \end{array}$$

   est dérivable. Exprimer $g'(t)$ en fonction de $x(t), y(t)$ et les dérivées $x'(t), y'(t)$.

10) [1pt] On suppose que $\gamma(0) = (0, 1)$. La fonction g admet-elle un point critique en $t = 0$?

Exercice 2 [8 pts] – Soit $R > 0$. On considère le sous-ensemble Ω de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2,\, 0 \leq z \leq R\}$$

et ayant pour densité de masse

$$\mu(x, y, z) = \frac{R^2 + z^2}{R^2 + x^2 + y^2}.$$

1) [1.5 pts] Écrire en coordonnées cylindriques l'ensemble Ω et la densité de masse μ.
2) [1 pt] Faire un dessin de Ω où figurent les axes de coordonnées.
3) [1.5 pts] En quel(s) point(s) de Ω la densité μ est-elle minimale ?
4) [2 pts] Déterminer la masse totale M de Ω en fonction de R.
   Indication pour le calcul : on rappelle que $\frac{d}{dx} \ln(a^2 + x^2) = \frac{2x}{a^2+x^2}$.
5) [2 pts] On note $G(x_G, y_G, z_G)$ le barycentre de Ω. Exprimez z_G en fonction de R. On ne demande pas de déterminer x_G et y_G.