Université Claude Bernard Lyon 1 **PCSI L1 - UE Math 2**

Corrigé de l'examen terminal 1 – mardi 30 avril 2024

Règlement – Une feuille recto-verso manuscrite de notes est autorisée ainsi que la feuille formulaire *Repères mobiles et champs vectoriels*. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Le barème des exercices est indiqué entre crochets. Les **réponses doivent être justifiées**.

Exercice 1 [12 pts] – On considère la fonction de deux variables définie par

$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$$

1) [0.5 pt] Donner l'ensemble D de définition de f.
2) [1 pt] Montrer que $L_0(f)$, la ligne de niveau 0, est réduite à un point que l'on déterminera.
3) [0.5 pt] Le point $(1,1)$ fait-il partie de $L_1(f)$, la ligne de niveau 1 de f ?
4) [1 pt] Déterminer le gradient $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y)$ au point $(1,1)$.
   Indication pour le calcul : On rappelle que $(u^2)' = 2u'u$.
5) [2.5 pts] Parmi les trois directions ci-dessous, laquelle donne la pente la plus forte au point $(1,1)$?

$$\overrightarrow{v_1} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}, \quad \overrightarrow{v_2} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}, \quad \overrightarrow{v_3} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}.$$

   Laquelle de ces directions est tangente à la ligne de niveau $L_1(f)$ au point $(1,1)$?
6) [2 pts] Montrer que f a deux points critiques que l'on déterminera.
7) [1.5 pts] Donner la matrice hessienne $H_f(x,y)$ de f.
8) [1 pt] Déterminer la nature de chaque point critique.
9) [1 pt] On considère l'application $g = f \circ \gamma$ où

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & \mathbb{R} & \longrightarrow & D \\ & t & \longmapsto & (x(t), y(t)) \end{array}$$

   est dérivable. Exprimer $g'(t)$ en fonction de $x(t), y(t)$ et les dérivées $x'(t), y'(t)$.

10) [1pt] On suppose que $\gamma(0) = (0,1)$. La fonction g admet-elle un point critique en $t = 0$?

Rép.– 1) Puisque ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, l'ensemble de définition de f est $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$
2) Par définition, $L_0(f)$ est l'ensemble des points $(x,y) \in D$ tels que $f(x,y) = 0$. En utilisant le fait que $(x,y) \in D$ entraîne que $y > 0$ on obtient

$$f(x,y) = 0 \iff y(x^2 + (\ln y)^2) = 0 \iff x^2 + \ln(y)^2 = 0 \iff \big(x^2 = 0 \text{ et } (\ln y)^2 = 0\big) \iff (x = 0 \text{ et } y = 1)$$

La ligne de niveau 0 est donc constituée de l'unique point $(0,1)$.
3) Puisque $f(1,1) = 1$, le point $(1,1)$ fait partie de $L_1(f)$.
4) On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + \ln^2 y + 2\ln y$$

ainsi

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y) = 2xy\vec{\imath} + \big(x^2 + \ln^2 y + 2\ln y\big)\vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{grad}}\, f(1,1) = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}.$$

5) La direction de plus forte pente est donné par le gradient $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(1,1)$, c'est-à-dire par le vecteur $\overrightarrow{v_2}$. Un vecteur $\vec{v}$ est dans la direction tangente à $L_1(f)$ en $(1,1)$ ssi $\langle \vec{v}, \overrightarrow{\text{grad}}\, f(1,1)\rangle = 0$. Ce n'est le cas que du vecteur $\overrightarrow{v_3} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.
6) D'après un calcul déjà fait plus haut

$$J_f(x,y) = (2xy, x^2 + \ln^2 y + 2\ln y).$$

Un point (x,y) est critique ssi $J_f(x,y)=(0,0)$. Il nous faut donc résoudre :

$$(\Sigma)\left\{\begin{array}{lcl} 2xy & = & 0 \\ x^2+\ln^2 y+2\ln y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ x^2+\ln^2 y+2\ln y & = & 0 \end{array}\right.$$

car $y>0$. Ainsi

$$(\Sigma) \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ \ln y(\ln y+2) & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ \ln y & = & 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ \ln y & = & -2 \end{array}\right.$$

Il y a donc deux solutions : $(0,1)$ et $(0,e^{-2})$.

7) Le calcul montre que

$$H_f(x,y)=\left(\begin{array}{cc} 2y & 2x \\ 2x & \dfrac{2}{y}(1+\ln y) \end{array}\right).$$

8) On a

$$H_f(0,1)=\left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{array}\right) \quad \text{et} \quad H_f(0,e^{-2})=\left(\begin{array}{cc} 2e^{-2} & 0 \\ 0 & -2e^2 \end{array}\right).$$

ce qui implique que $(0,1)$ est un minimum local et $(0,e^{-2})$ un point selle.

9) On applique la règle de la chaîne

$$g'(t)=J_f(\gamma(t)).J_\gamma(t)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)),\frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))\right)\left(\begin{array}{c} x'(t) \\ y'(t) \end{array}\right)=x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))+y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))$$

En remplaçant les dérivées partielles de f, il vient

$$g'(t)=2x(t)y(t)x'(t)+\left(x^2(t)+\ln^2 y(t)+2\ln y(t)\right)y'(t)$$

10) En $t=0$, la dérivée s'écrit

$$g'(t)=2x(0)y(0)x'(0)+\left(x^2(0)+\ln^2 y(0)+2\ln y(0)\right)y'(0)$$

Puisque $x(0)=0$ et $y(0)=1$ on obtient

$$g'(0)=0\times x'(0)+0\times y'(0)=0.$$

Le point $t=0$ est donc un point critique de g.

Remarque.– Une autre façon de procéder, tout à fait licite, est de remarquer que puisque $(0,\gamma(0))=(0,1)$ est minimum local (et même global) de f, le point $t=0$ est nécessairement un minimum local (et même global) de $g=f\circ\gamma$.

Exercice 2 [8 pts] – Soit $R>0$. On considère le sous-ensemble Ω de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leq R^2,\ 0\leq z\leq R\}$$

et ayant pour densité de masse

$$\mu(x,y,z)=\frac{R^2+z^2}{R^2+x^2+y^2}.$$

1) [1.5 pts] Écrire en coordonnées cylindriques l'ensemble Ω et la densité de masse μ.
2) [1 pt] Faire un dessin de Ω où figurent les axes de coordonnées.
3) [1.5 pts] En quel(s) point(s) de Ω la densité μ est-elle minimale ?
4) [2 pts] Déterminer la masse totale M de Ω en fonction de R.
Indication pour le calcul : on rappelle que $\frac{d}{dx}\ln(a^2+x^2)=\frac{2x}{a^2+x^2}$.
5) [2 pts] On note $G(x_G,y_G,z_G)$ le barycentre de Ω. Exprimez z_G en fonction de R. On ne demande pas de déterminer x_G et y_G.

Rép.– 1) En passant en coordonnées cylindriques, on trouve directement

$$\Omega=\{(\rho,\varphi,z)\mid 0\leq\rho\leq R,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi, 0\leq z\leq 1\} \quad \text{et} \quad \mu(\rho,\varphi,z)=\frac{R^2+z^2}{R^2+\rho^2}.$$

2) L'ensemble Ω est un cylindre plein de rayon R et de hauteur R.
3) L'expression de μ est minimale lorsque $z=0$ et $\rho=R$, donc sur le cercle de rayon R et d'altitude 0.
4) Par définition

$$M=\iiint_\Omega \mu(x,y,z)dxdydz$$

ainsi en passant en coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned}
M &= \int_{\rho=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{R}\rho\frac{R^2+z^2}{R^2+\rho^2}dzd\varphi d\rho \\
&= \int_{\rho=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{\rho}{R^2+\rho^2}\left[R^2z+\frac{z^3}{3}\right]_0^R d\varphi d\rho \\
&= \frac{4R^3}{3}\int_{\rho=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{\rho}{R^2+\rho^2}d\varphi d\rho \\
&= \frac{8\pi R^3}{3}\int_{\rho=0}^{R}\frac{\rho}{R^2+\rho^2}d\rho \\
&= \frac{8\pi R^3}{3}\left[\frac{1}{2}\ln(R^2+\rho^2)\right]_0^R \\
&= \frac{4\pi R^3}{3}\left(\ln(2R^2)-\ln(R^2)\right) \\
&= \frac{4\pi\ln 2}{3}R^3
\end{aligned}$$

5) La coordonnée z_G est donnée par l'expression

$$z_G = \frac{1}{M}\iiint_\Omega z\mu(x,y,z)dxdydz$$

ainsi en en passant en coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned}
z_G &= \frac{1}{M}\int_{\rho=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{R} z\rho\frac{R^2+z^2}{R^2+\rho^2}dzd\varphi d\rho \\
&= \frac{1}{M}\int_{\rho=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{R}(R^2z+z^3)\frac{\rho}{R^2+\rho^2}dzd\varphi d\rho \\
&= \frac{1}{M}\int_{\rho=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left[\frac{R^2}{2}z^2+\frac{1}{4}z^4\right]_0^R\frac{\rho}{R^2+\rho^2}d\varphi d\rho \\
&= \frac{3R^4}{4M}\int_{\rho=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{\rho}{R^2+\rho^2}d\varphi d\rho
\end{aligned}$$

D'après le calcul déjà réalisé plus haut

$$\int_{\rho=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{\rho}{R^2+\rho^2}d\varphi d\rho = \pi\ln 2 = \frac{3M}{4R^3}.$$

Ainsi

$$z_G = \frac{3R^4}{4M}\times\frac{3M}{4R^3} = \frac{9}{16}R.$$