Université Claude Bernard Lyon 1 **PCSI L1 - UE Math 2**

EXAMEN TERMINAL 2 – Mercredi 23 juin 2021 – Durée 1h30

Règlement – Une feuille recto-verso manuscrite de notes est autorisée ainsi que la feuille formulaire *Repères mobiles et champs vectoriels*. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Le barème des exercices est indiqué entre crochets. Les **réponses doivent être justifiées**.

Exercice 1 [8 pts] – Cet exercice est en deux parties relativement indépendantes.

On considère la fonction de deux variables f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \exp(h(x, y))$ où $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables.

Partie I.

a) [1 pt] Montrer que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) f(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) f(x, y).$$

b) [1 pt] En déduire que (x_0, y_0) est un point critique de f si et seulement s'il est un point critique de h.

c) [0.5 pt] Montrer que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) f(x, y) + \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

d) [1 pt] Écrire les dérivées partielles d'ordre 2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$$

en fonction des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de h et des dérivées partielles d'ordre 1 de f.

e) [1 pt] Déduire des questions a), b) et c) qu'en un point critique (x_0, y_0) la matrice hessienne de f s'écrit

$$H_f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) H_h(x_0, y_0)$$

Partie II.

a) [1 pt] On suppose désormais que $h(x, y) = y^2 - x^2 + xy + x - y$. Montrer que $f(x, y) = e^{h(x,y)}$ admet un unique point critique (x_0, y_0) que l'on déterminera. *Indication* : on pourra utiliser le résultat de la question b) de la première partie.

b) [1 pt] Déterminer la matrice hessienne de h en (x_0, y_0).

c) [0.5 pt] Calculer $f(x_0, y_0)$ où $f(x, y) = \exp(h(x, y))$.

d) [0.5 pt] En utilisant la question e) de la première partie, déterminer la matrice hessienne de f en (x_0, y_0).

e) [0.5 pt] En déduire la nature du point critique (x_0, y_0).

Exercice 2 [4.5 pts] – On considère le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y,z) = x^2\overrightarrow{i} + y^2\overrightarrow{j} + z^2\overrightarrow{k}$.

a) [2 pts] Calculer la circulation de $\overrightarrow{V}(x,y,z)$ le long du chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ donné par

$$\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$$

b) [1 pt] Le champ $\overrightarrow{V}(x,y,z)$ est-il irrotationnel ? Est-il conservatif ?

c) [1 pt] Déterminer un potentiel $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de $\overrightarrow{V}(x,y,z)$.

d) [0.5 pt] Calculer la circulation de $\overrightarrow{V}(x,y,z)$ le long de l'ellipse E paramétrée par $t \mapsto (\cos t, \cos t, \sin t)$ avec $t \in [0, 2\pi]$.

Exercice 3 [4 pts] – On considère le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}.$$

a) [2 pts] Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ au travers du quart de cylindre C paramétré par

$$f(u,v) = (\cos u, \sin u, v), \qquad u \in [0, \frac{\pi}{2}],\ v \in [0,1].$$

b) [1 pt] Le champ $\overrightarrow{V}$ est-il incompressible ? Admet-il un potentiel vectoriel ?

c) [1 pt] Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ au travers de la sphère S paramétrée par

$$(u,v) \longmapsto (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$$

avec $(u,v) \in [0,\pi] \times [0, 2\pi]$.

Exercice 4 [3.5 pts] – Soient $R > 0$ et $H > 0$. On considère le cylindre plein

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \le R^2,\ 0 \le z \le H\}$$

ayant pour densité de masse

$$\mu(x,y,z) = \frac{(H-z)(R-\sqrt{x^2+y^2})}{RH}.$$

a) [1 pt] Écrire en coordonnées cylindriques l'ensemble Ω et la densité de masse μ.

b) [1 pt] Déterminer la masse totale M du cylindre plein en fonction de H et de R.

c) [0.5 pt] Calculer le volume V de Ω et exprimer M en fonction de V.

d) [1 pt] On note $G(x_G, y_G, z_G)$ le barycentre du cylindre. Exprimez z_G en fonction de H. On ne demande pas de déterminer x_G et y_G.