Université Claude Bernard Lyon 1

M1G – Topologie Agébrique

Contrôle partiel - 5 mars 2024 - durée 2h

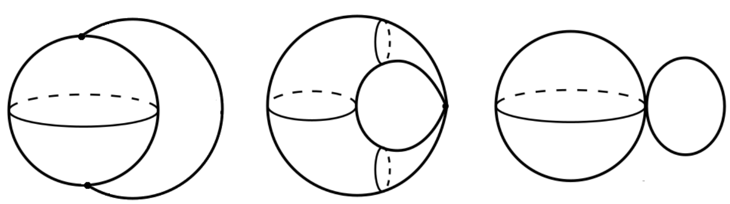
Les documents sont autorisés mais les calculettes et les portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Vrai-Faux. – Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse au moyen de brefs arguments et/ou d'un dessin éclairant.

1.– [2pts] Soit A un méridien joignant le pôle Sud au pôle Nord de la sphère unité $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ et soit $g = f_{|A}$ où

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (\cos \pi z, \sin \pi z) \end{array}$$

Le recollement $\mathbb{S}^2 \sqcup_g \mathbb{S}^1$ de $\mathbb{S}^2$ à $\mathbb{S}^1$ le long de g est homéomorphe à l'espace représenté en (a) dans les dessins ci-dessous.



(a) (b) (c)

2.– [2pts] L'application

$$\begin{array}{rccl} r: & \mathbb{R}^3 \setminus (Oz) & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y,0) \end{array}$$

est une rétraction par déformation de $\mathbb{R}^3 \setminus (Oz)$ sur le cercle.

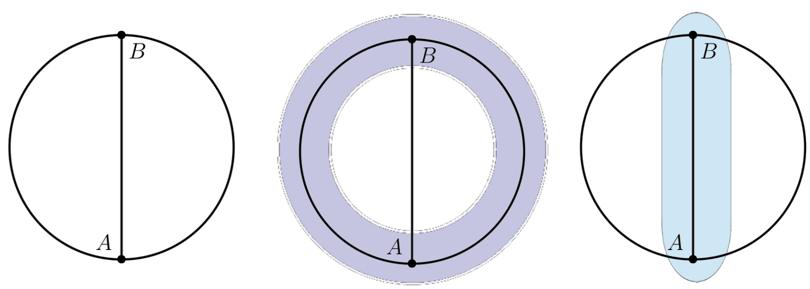
3.– [2pts] Soient $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, $x_0 \in \mathbb{T}^2$ et $u \in \Omega(\mathbb{T}^2, x_0)$. L'application

$$\begin{array}{rccl} \beta_u: & \pi_1(\mathbb{T}^2, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{T}^2, x_0) \\ & [\gamma] & \longmapsto & [\bar{u} * \gamma * u] \end{array}$$

est l'identité.

4.– [2pts] Soit $f : (\mathbb{S}^1, 1) \to (X, x_0)$ une application continue telle que la classe $[f]$ de f soit triviale dans $\pi_1(X, x_0)$ alors il existe une application continue $g : D^2 \to X$ qui étend f, c'est-à-dire telle que $g_{|\mathbb{S}^1} = f$.

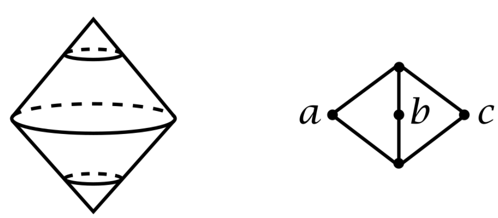
5.– [2pts] On considère le CW complexe X ayant deux sommets A et B et trois arêtes dont les extrémités sont A et B. On note $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ les ouverts de $\mathbb{R}^2$ figurés ci-dessous et on pose $U = \mathcal{U} \cap X$ et $V = \mathcal{V} \cap X$.



Le CW complexe X (à gauche) et les ouverts $\mathcal{U}$ (au centre) et $\mathcal{V}$ (à droite).

D'une part, puisque U se rétracte par déformation forte sur un cercle, $\pi_1(U, A) \cong \mathbb{Z}$. D'autre part, puisque V se rétracte par déformation forte sur A, $\pi_1(V, A)$ est trivial. De même $\pi_1(U \cap V, A)$ est trivial puisque la composante connexe de $U \cap V$ qui contient A se rétracte par déformation forte sur A. Le théorème de Van Kampen permet d'affirmer que le groupe fondamental de X est $\pi_1(X, A) \cong \mathbb{Z}$.

Problème.– Le but de ce problème est de présenter la notion de *suspension*, d'en étudier quelques exemples et d'en établir quelques propriétés.



Suspensions du cercle $\mathbb{S}^1$ (à gauche) et de trois points $\{a, b, c\}$ (à droite).

Partie 1 : Le foncteur S.– Soit X un espace topologique séparé et localement compact. La suspension SX de X est l'espace quotient

$$SX = X \times I / \sim$$

où $I = [-1, 1]$ et où $\sim$ est la relation d'équivalence sur $Y = X \times I$ définie par

$$y_1 \sim y_2 \quad \text{si} \quad \begin{cases} y_1 = y_2 \\ \quad \text{ou} \\ (y_1 = (x_1, -1) \text{ et } y_2 = (x_2, -1)) \\ \quad \text{ou} \\ (y_1 = (x_1, 1) \text{ et } y_2 = (x_2, 1)). \end{cases}$$

On a noté $y = (x, u) \in X \times I$. Intuitivement, on forme un cylindre de base X et on réduit $A_{-1} = X \times \{-1\}$ à un point et $A_1 = X \times \{1\}$ à un autre point. On note $p : X \times I \to SX$ l'application quotient.

1) i) Montrer que $\sim$ est fermée.
ii) Montrer que SX est séparé.
iii) Montrer que SX est compact si X est compact.

2) Soit $f : X_1 \to X_2$ une application continue et $p_i : X_i \times I \to SX_i$, $i \in \{1, 2\}$ les projections canoniques.
i) Soit

$$f \times id : X_1 \times I \longrightarrow X_2 \times I.$$

Montrer que l'application quotient

$$\begin{array}{rccc} Sf : & SX_1 & \longrightarrow & SX_2 \\ & [y_1] & \longmapsto & p_2 \circ (f \times id)(y_1) \end{array}$$

est bien définie.
ii) Montrer que Sf est continue.
iii) Montrer que si $f = id_{X_1}$ (et donc $X_1 = X_2$) alors $Sf = id_{SX_1}$.
iv) Montrer que si $g : X_2 \to X_3$ alors $S(g \circ f) = Sg \circ Sf$.
v) Montrer que si X_1 et X_2 sont homéomorphes alors SX_1 et SX_2 sont homéomorphes.

Partie 2 : Suspension du cercle.– On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{S}^1 \times I & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R} \\ & (e^{i\theta}, u) & \longmapsto & (\sqrt{1 - u^2} e^{i\theta}, u) \end{array}$$

3i) Montrer que f est surjective.
ii) Déterminer les points de $\mathbb{S}^2$ ayant deux antécédents ou plus.
iii) L'application f est-elle continue ?

4)i) Montrer que l'application f passe au quotient en une application continue

$$\bar{f} : S\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^2$$

ii) Montrer que $\bar{f}$ est un homéomorphisme.

Partie 3 : Propriété de la suspension.– On revient au cas général où X est un espace topologique séparé et localement compact. On note v_+ (resp. v_-) la classe $[(x,1)]$ (resp. la classe $[(x,-1)]$) de SX.

5) Dans cette question 5, on ne suppose pas que X est connexe par arcs.
i) Décrire un chemin $\delta : [0,1] \to SX$ joignant v_- à v_+.
ii) Soit $[(x_0, u_0)]$ un point de SX avec $0 \leq u_0 < 1$ (resp. $-1 < u_0 < 0$). Décrire un chemin $\delta_0^+ : [0,1] \to SX$ joignant $[(x_0, u_0)]$ à v_+ (resp. $\delta_0^- : [0,1] \to SX$ joignant $[(x_0, u_0)]$ à v_-).
iii) Montrer que SX est connexe par arcs.

6) On suppose maintenant que X est connexe par arcs. On choisit un point quelconque $x_0 \in X$ et on note $[y_0] = [(x_0, 0)] \in SX$.
i) Soit $U_+ = SX \setminus \{v_+\}$ et $U_- = SX \setminus \{v_+\}$. Montrer que U_+ et U_- sont des ouverts de SX.
ii) Montrer $U_+ \cap U_- = X \times]-1,1[$ est connexe par arcs.
iii) Soit

$$\begin{array}{cccl} \gamma : & [0,1] & \longrightarrow & U_+ \\ & s & \longmapsto & [(x(s), u(s))] \end{array}$$

un lacet quelconque basé en v_-. Écrire une homotopie à valeur dans U_+, basée en v_-, entre γ et le chemin constant c_{v_-}.
iv) Déduire de la question iii) que le groupe $\pi_1(U_+, [y_0])$ est trivial.
v) Montrer que SX est simplement connexe.