

Université Claude Bernard Lyon 1
M1G – Topologie Algébrique
 Contrôle partiel - 5 mars 2024 - durée 2h

Les documents sont autorisés mais les calculatrices et les portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

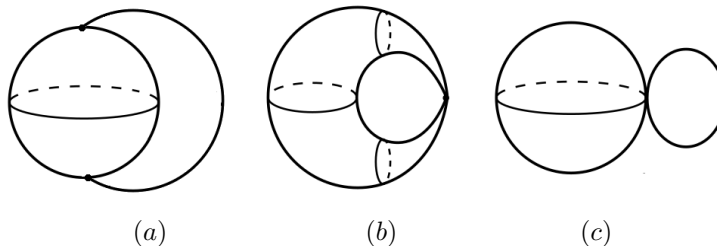
Vrai-Faux. – Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse au moyen de brefs arguments et/ou d'un dessin éclairant.

1.– [2pts] Soit A un méridien joignant le pôle Sud au pôle Nord de la sphère unité $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ et soit $g = f|_A$ où

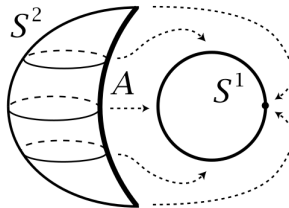
$$f : S^2 \longrightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \longmapsto (\cos \pi z, \sin \pi z)$$

Le recollement $S^2 \sqcup_g S^1$ de S^2 à S^1 le long de g est homéomorphe à l'espace représenté en (a) dans les dessins ci-dessous.



Rép.– FAUX, il s'agit du (b). Le dessin ci-dessous illustre la raison



2.– [2pts] L'application

$$r : \mathbb{R}^3 \setminus (Oz) \longrightarrow S^1 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$$

$$(x, y, z) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0)$$

est une rétraction par déformation de $\mathbb{R}^3 \setminus (Oz)$ sur le cercle.

Rép.– VRAI. Soit

$$C = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

On vérifie immédiatement que r est surjective sur C et que $r|_C = id_C$. L'application

$$H_t(p) = tp + (1-t)r(p)$$

définit une homotopie joignant r à id . Notons que $H_t(p) \in \mathbb{R}^3 \setminus (Oz)$ pour tout (t, p) . En effet, la distance $d(p, t)$ de $H_t(p)$ à (Oz) est

$$d^2(p, t) = \left(t\sqrt{x^2 + y^2} + (1-t)\right)^2$$

et cette distance ne s'annule que si $x^2 + y^2 = 0$.

3.– [2pts] Soient $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, $x_0 \in \mathbb{T}^2$ et $u \in \Omega(\mathbb{T}^2, x_0)$. L'application

$$\begin{aligned} \beta_u : \pi_1(\mathbb{T}^2, x_0) &\longrightarrow \pi_1(\mathbb{T}^2, x_0) \\ [\gamma] &\longmapsto [\bar{u} * \gamma * u] \end{aligned}$$

est l'identité.

Rép.– VRAI. On a d'après le cours

$$\beta_u([\gamma]) = [u]^{-1} \cdot [\gamma] \cdot [u]$$

et comme $\pi_1(\mathbb{T}^2, x_0) \cong \mathbb{Z}^2$ est commutatif

$$[u]^{-1} \cdot [\gamma] \cdot [u] = [u]^{-1} \cdot [u] \cdot [\gamma] = [\gamma].$$

4.– [2pts] Soit $f : (\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow (X, x_0)$ une application continue telle que la classe $[f]$ de f soit triviale dans $\pi_1(X, x_0)$ alors il existe une application continue $g : D^2 \rightarrow X$ qui étend f , c'est-à-dire telle que $g|_{\mathbb{S}^1} = f$.

Rép.– VRAI. Soit

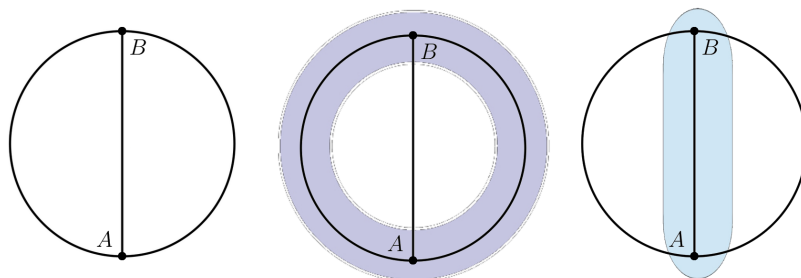
$$\begin{aligned} H : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] &\longrightarrow X \\ (s, t) &\longmapsto H(t, s) \end{aligned}$$

une homotopie de lacets basés en x_0 et joignant $c_{x_0} = H(\cdot, 0)$ à $f = H(\cdot, 1)$. Puisque $H(s, 0) = x_0$ pour tout $s \in \mathbb{S}^1$, l'application H passe au quotient en une application continue

$$g : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] / \mathbb{S}^1 \times \{0\} \longrightarrow X$$

ou $\mathbb{S}^1 \times [0, 1] / \mathbb{S}^1 \times \{0\} \simeq D^2$.

5.– [2pts] On considère le CW complexe X ayant deux sommets A et B et trois arêtes dont les extrémités sont A et B . On note \mathcal{U} et \mathcal{V} les ouverts de \mathbb{R}^2 figurés ci-dessous et on pose $U = \mathcal{U} \cap X$ et $V = \mathcal{V} \cap X$.



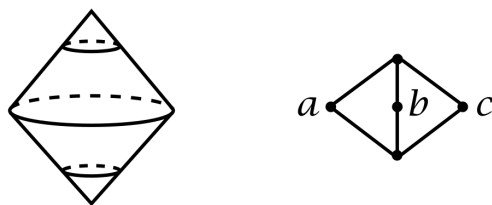
Le CW complexe X (à gauche) et les ouverts \mathcal{U} (au centre) et \mathcal{V} (à droite).

D'une part, puisque U se rétracte par déformation forte sur un cercle, $\pi_1(U, A) \cong \mathbb{Z}$. D'autre part, puisque V se rétracte par déformation forte sur A , $\pi_1(V, A)$ est trivial. De même $\pi_1(U \cap V, A)$ est trivial puisque la composante connexe de $U \cap V$ qui contient A se rétracte par déformation forte sur A . Le théorème de Van Kampen permet d'affirmer que le groupe fondamental de X est $\pi_1(X, A) \cong \mathbb{Z}$.

Rép.— FAUX. On ne peut appliquer le théorème de Van Kampen avec ce choix pour les ouverts U et V . En effet, $U \cap V$ n'est pas connexe par arcs. D'ailleurs, le groupe fondamental obtenu est inexact. On peut s'en convaincre en utilisant la méthode présentée dans les exercices de la leçon TA6 pour montrer que

$$\pi_1(X, \mathbb{Z}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, A) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Problème.— Le but de ce problème est de présenter la notion de *suspension*, d'en étudier quelques exemples et d'en établir quelques propriétés.



Suspensions du cercle \mathbb{S}^1 (à gauche) et de trois points $\{a, b, c\}$ (à droite).

PARTIE 1 : LE FONCTEUR S .— Soit X un espace topologique séparé et localement compact. La suspension SX de X est l'espace quotient

$$SX = X \times I / \sim$$

où $I = [-1, 1]$ et où \sim est la relation d'équivalence sur $Y = X \times I$ définie par

$$y_1 \sim y_2 \quad \text{si} \quad \begin{cases} y_1 = y_2 \\ \text{ou} \\ (y_1 = (x_1, -1) \text{ et } y_2 = (x_2, -1)) \\ \text{ou} \\ (y_1 = (x_1, 1) \text{ et } y_2 = (x_2, 1)). \end{cases}$$

On a noté $y = (x, u) \in X \times I$. Intuitivement, on forme un cylindre de base X et on réduit $A_{-1} = X \times \{-1\}$ à un point et $A_1 = X \times \{1\}$ à un autre point. On note $p : X \times I \rightarrow SX$ l'application quotient.

- 1) i) Montrer que \sim est fermée.
- ii) Montrer que SX est séparé.
- iii) Montrer que SX est compact si X est compact.

Rép.— 1i) Notons $A = A_{-1} \cup A_1$ et soit F un fermé de $Y = X \times I$:

- si $F \cap A = \emptyset$ alors $p^{-1}(p(F)) = F$ et il est fermé,
- si $F \cap A_{-1} \neq \emptyset$ et $F \cap A_1 = \emptyset$ alors $p^{-1}(p(F)) = F \cup A_{-1}$ et il est fermé comme union de deux fermés,
- si $F \cap A_{-1} = \emptyset$ et $F \cap A_1 \neq \emptyset$ alors $p^{-1}(p(F)) = F \cup A_1$ et il est fermé comme union de deux fermés,
- si $F \cap A_{-1} \neq \emptyset$ et $F \cap A_1 \neq \emptyset$ alors $p^{-1}(p(F)) = F \cup A$ et il est fermé comme union du fermé F et du fermé A .

- ii) Puisque X est relativement compact, $Y = X \times I$ l'est aussi. Comme \sim est fermé, le quotient Y/\sim est séparé.
- iii) La projection canonique $p : X \times I \rightarrow SX$ est continue d'un espace compact dans un espace séparé, ainsi $SX = p(X \times I)$ est compact.

2) Soit $f : X_1 \rightarrow X_2$ une application continue et $p_i : X_i \times I \rightarrow SX_i$, $i \in \{1, 2\}$ les projections canoniques.

i) Soit

$$f \times id : X_1 \times I \longrightarrow X_2 \times I.$$

Montrer que l'application quotient

$$\begin{aligned} Sf : SX_1 &\longrightarrow SX_2 \\ [y_1] &\longmapsto p_2 \circ (f \times id)(y_1) \end{aligned}$$

est bien définie.

- ii) Montrer que Sf est continue.
- iii) Montrer que si $f = id_{X_1}$ (et donc $X_1 = X_2$) alors $Sf = id_{SX_1}$.
- iv) Montrer que si $g : X_2 \rightarrow X_3$ alors $S(g \circ f) = Sg \circ Sf$.
- v) Montrer que si X_1 et X_2 sont homéomorphes alors SX_1 et SX_2 sont

homéomorphes.

Rép.– 2i) Il faut montrer que la définition de Sf ne dépend pas du représentant y choisi pour calculer $Sf([y_1])$. Le problème ne se pose que pour les classes non réduites à un point. Celles-ci sont au nombre de deux

$$[(x_1, -1)] \quad \text{et} \quad [(x_1, 1)]$$

Soit $k \in \{-1, 1\}$ et $[(x_1, k)] = [(x'_1, k)]$, on a

$$p_2 \circ (f \times id)(x_1, k) = p_2(f(x_1), k) = [(f(x_1), k)]$$

et

$$p_2 \circ (f \times id)(x'_1, k) = p_2(f(x'_1), k) = [(f(x'_1), k)].$$

Il ne reste plus qu'à constater que $[(f(x_1), k)]$ et $[(f(x'_1), k)]$ sont dans la même classe puisque $k \in \{-1, 1\}$. Ainsi Sf est bien définie.

ii) Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times I & \xrightarrow{f \times id} & X_2 \times I \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ SX_1 & \xrightarrow{Sf} & SX_2 \end{array}$$

L'application $f \times id$ est continue car f est continue, l'application p_2 est continue par définition de la topologie quotient sur SX_2 donc l'application $p_2 \circ (f \times id)$ est continue. Par la proposition de transfert de continuité au quotient, l'application Sf est continue.

iii) Si $f = id_{X_1}$ alors

$$Sf([y_1]) = p_1 \circ (id_{X_1} \times id)(y_1) = p_1(y_1) = [y_1].$$

iv) On a

$$S(g \circ f)([y_1]) = p_3 \circ ((g \circ f) \times id)(y_1)$$

et

$$\begin{aligned} (Sg \circ Sf)([y_1]) &= Sg(p_2 \circ (f \times id)(y_1)) \\ &= Sg([(f \times id)(y_1)]) \\ &= p_3 \circ (g \times id)((f \times id)(y_1)) \\ &= p_3 \circ ((g \circ f) \times id)(y_1). \end{aligned}$$

v) Soit $f : X_1 \rightarrow X_2$ un homéomorphisme. D'après la question ii) précédente Sf et Sf^{-1} sont continues. D'après les questions iii) et iv) puisque $f \circ f^{-1} = id_{X_1}$, on a

$$Sf \circ Sf^{-1} = S(f \circ f^{-1}) = Sid_{X_1} = id_{SX_1}$$

De même, $f^{-1} \circ f = id_{X_2}$ conduit à

$$Sf^{-1} \circ Sf = S(f^{-1} \circ f) = Sid_{X_2} = id_{SX_2}$$

Ainsi Sf et Sf^{-1} sont inverses l'une de l'autre. Au bilan, $Sf : SX_1 \rightarrow SX_2$ est un homéomorphisme.

PARTIE 2 : SUSPENSION DU CERCLE.— On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{S}^1 \times I &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R} \\ (e^{i\theta}, u) &\longmapsto (\sqrt{1-u^2}e^{i\theta}, u) \end{aligned}$$

3i) Montrer que f est surjective.

ii) Déterminer les points de \mathbb{S}^2 ayant deux antécédents ou plus.

iii) L'application f est-elle continue ?

Rép.— 3i) Soient $p = (x + iy, z) \in \mathbb{S}^2$ et $\rho e^{i\theta}$ une écriture de $x + iy$ sous forme polaire avec $\rho \geq 0$. Puisque $p \in \mathbb{S}^2$, on a nécessairement

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 - z^2}$$

ainsi

$$p = (x + iy, z) = (\sqrt{1 - z^2}e^{i\theta}, z) = f(e^{i\theta}, z).$$

Ceci montre que f est surjective.

ii) Supposons $f(e^{i\theta_1}, u_1) = f(e^{i\theta_2}, u_2)$ c'est-à-dire

$$(\sqrt{1 - u_1^2}e^{i\theta_1}, u_1) = (\sqrt{1 - u_2^2}e^{i\theta_2}, u_2).$$

Ceci implique $u_1 = u_2$ et donc

$$\sqrt{1 - u_1^2}e^{i\theta_1} = \sqrt{1 - u_1^2}e^{i\theta_2}.$$

Si $u_1^2 \neq 1$, on peut simplifier et obtenir $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$. Dans ce cas là, il y a donc un unique antécédent.

Si $u_1 = \pm 1$, alors $f^{-1}(p) = \mathbb{S}^1 \times \{\pm 1\}$. Les pôles Sud S et Nord N ont chacun un cercle de points antécédents.

iii) L'application f est évidemment continue : c'est la restriction à $\mathbb{S}^1 \times I$ de

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \times I &\longrightarrow \mathbb{C} \times I \\ (w, u) &\longmapsto (\sqrt{1 - u^2}.w, u) \end{aligned}$$

4)i) Montrer que l'application f passe au quotient en une application continue

$$\bar{f} : \mathbb{S}\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^2$$

ii) Montrer que \bar{f} est un homéomorphisme.

Rép.— 4i) Les seules classes non triviale de $\mathbb{S}\mathbb{S}^1$ sont les deux classes

$$[(e^{i\theta}, 1)] = \mathbb{S}^1 \times \{1\} \quad \text{et} \quad [(e^{i\theta}, -1)] = \mathbb{S}^1 \times \{-1\}$$

Or $f(e^{i\theta}, 1) = (0, 1)$ et $f(e^{i\theta}, -1) = (0, -1)$, ainsi f passe au quotient. D'après la propriété de transfert de continuité au quotient \bar{f} est continue.

ii) D'après la question 3), f est surjective et son seul défaut d'injectivité concerne les deux classes $[(e^{i\theta}, 1)]$ et $[(e^{i\theta}, -1)]$. Ces classes sont envoyées sur N et sur S . Ainsi \bar{f} est injective, donc bijective. D'après la question 1, $\mathbb{S}\mathbb{S}^1$ est compact. Une application bijective continue d'un espace compact dans un espace séparé est un

homéomorphisme.

PARTIE 3 : PROPRIÉTÉ DE LA SUSPENSION.— On revient au cas général où X est un espace topologique séparé et localement compact. On note v_+ (resp. v_-) la classe $[(x, 1)]$ (resp. la classe $[(x, -1)]$) de SX .

5) Dans cette question 5, on ne suppose pas que X est connexe par arcs.

i) Décrire un chemin $\delta : [0, 1] \rightarrow SX$ joignant v_- à v_+ .

ii) Soit $[(x_0, u_0)]$ un point de SX avec $0 \leq u_0 < 1$ (resp. $-1 < u_0 < 0$).

Décrire un chemin $\delta_0^+ : [0, 1] \rightarrow SX$ joignant $[(x_0, u_0)]$ à v_+ (resp.

$\delta_0^- : [0, 1] \rightarrow SX$ joignant $[(x_0, u_0)]$ à v_-).

iii) Montrer que SX est connexe par arcs.

Rép.— 5i) Soit $x \in X$ un point quelconque de X . On pose

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\longrightarrow X \times I \\ s &\longmapsto (x, 2s - 1) \end{aligned}$$

Le chemin $\delta := p \circ \gamma$ joint le point v_- au point v_+ .

ii) Supposons $0 \leq u_0 < 1$. Soit

$$\begin{aligned} \gamma_0^+ : [0, 1] &\longrightarrow X \times I \\ s &\longmapsto (x_0, s(1 - u_0) + u_0) \end{aligned}$$

où $i \in \{0, 1\}$. Le chemin $\delta_0 := p \circ \gamma_0^+$ joint le point $[(x_0, u_0)]$ au point v_+ .

Supposons $-1 < u_0 < 0$. Soit

$$\begin{aligned} \gamma_0^- : [0, 1] &\longrightarrow X \times I \\ s &\longmapsto (x_0, -s(1 + u_0) + u_0) \end{aligned}$$

où $i \in \{0, 1\}$. Le chemin $\delta_0^- := p \circ \gamma_0^-$ joint le point $[(x_0, u_0)]$ au point v_- .

iii) Soient $[(x_0, u_0)]$ et $[(x_1, u_1)]$ deux points distincts de SX . Si cet ensemble de points est $\{v_+, v_-\}$ alors la question i) donne un chemin les joignant.

Supposons que l'un des deux points seulement est v_+ ou v_- . Pour fixer les idées disons que $v_+ = [(x_1, u_1)]$. Si $u_0 \geq 0$ alors la question ii) donne un chemin δ_0^+ joignant $[(x_0, u_0)]$ à v_+ . Si $u_0 < 0$ alors δ_0^- est un chemin qui joint $[(x_0, u_0)]$ à v_- et la concaténation

$$\delta_0^- * \delta$$

est un chemin de SX qui joint $[(x_0, u_0)]$ à v_+ .

Si aucun des deux points n'appartient à $\{v_+, v_-\}$, supposons d'abord pour fixer les idées que $0 \leq u_0, u_1 < 1$. Alors la question ii) fournit un chemin δ_0^+ qui joint $[(x_0, u_0)]$ à v_+ et un chemin δ_1^+ qui joint $[(x_1, u_1)]$ à ce même v_+ . La concaténation

$$\delta_0^+ * \delta_1^+$$

donne un chemin de SX qui joint $[(x_0, u_0)]$ à $[(x_1, u_1)]$. Supposons maintenant que $0 \leq u_0 < 1$ mais que $-1 < u_1 < 0$. La question ii) fournit un chemin δ_0^+ qui joint

$[(x_0, u_0)]$ à v_+ et un chemin δ_1^- qui joint $[(x_1, u_1)]$ à v_- . La concaténation

$$\delta_0^+ * \bar{\delta} * \bar{\delta}_1^-$$

donne un chemin de SX qui joint $[(x_0, u_0)]$ à $[(x_1, u_1)]$. Les autres cas se traitent similairement.

6) On suppose maintenant que X est connexe par arcs. On choisit un point quelconque $x_0 \in X$ et on note $[y_0] = [(x_0, 0)] \in SX$.

i) Soit $U_+ = SX \setminus \{v_+\}$ et $U_- = SX \setminus \{v_+\}$. Montrer que U_+ et U_- sont des ouverts de SX .

ii) Montrer $U_+ \cap U_- = X \times]-1, 1[$ est connexe par arcs.

iii) Soit

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\longrightarrow U_+ \\ s &\longmapsto [(x(s), u(s))] \end{aligned}$$

un lacet quelconque basé en v_- . Écrire une homotopie à valeur dans U_+ , basée en v_- , entre γ et le chemin constant c_{v_-} .

iv) Dédire de la question iii) que le groupe $\pi_1(U_+, [y_0])$ est trivial.

v) Montrer que SX est simplement connexe.

Rép.– i) L'espace U_+ est le complémentaire du fermé $\{v_+\}$ dans SX . C'est donc un ouvert. Argument similaire pour U_- .

ii) Puisque X et $]-1, 1[$ sont connexes par arcs, le produit $X \times]-1, 1[$ est également connexe par arcs.

iii) L'application

$$\begin{aligned} H : [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow U_+ \subset SX \\ (s, t) &\longmapsto [(x(s), (1-t)u(s) - t)] \end{aligned}$$

est une homotopie à valeur dans U_+ joignant $\gamma(\cdot) = H(\cdot, 0)$ à $c_{v_-} = H(\cdot, 1)$. Pour montrer que cette homotopie est basée en v_- , on observe que, puisque le lacet γ est basé en v_- , on a nécessairement $u(0) = u(1) = -1$. Ainsi

$$H(0, t) = [(x(0), (1-t)u(0) - t)] = [(x(0), -1)] = v_-$$

et

$$H(1, t) = [(x(1), (1-t)u(1) - t)] = [(x(1), -1)] = v_-.$$

iv) D'après la question iii), le groupe fondamental $\pi_1(U_+, v_-)$ est trivial. Le chemin $v(s) = [(x_0, -s)]$ joint $[y_0] = [(x_0, 0)]$ à v_- , les groupes

$$\pi_1(U_+, v_-) \quad \text{et} \quad \pi_1(U_+, [y_0])$$

sont donc isomorphes via β_v . On en déduit que $\pi_1(U_+, [y_0])$ est trivial.

v) On vient de montrer que $\pi_1(U_+, [y_0])$ est trivial. Un raisonnement similaire montrerait que $\pi_1(U_-, [y_0])$ est également trivial. On en déduit, par application du théorème de Van Kampen, que le groupe $\pi_1(SX, [y_0])$ est trivial. Puisque SX est connexe par arcs (Q5iii), c'est dire que SX est simplement connexe. Notons que les questions précédentes ont permis de vérifier que les hypothèses du théorème de Van Kampen sont bien satisfaites.