Université Claude Bernard Lyon 1

M1G – Topologie Agébrique

Contrôle terminal - 29 mai 2024 - durée 2h

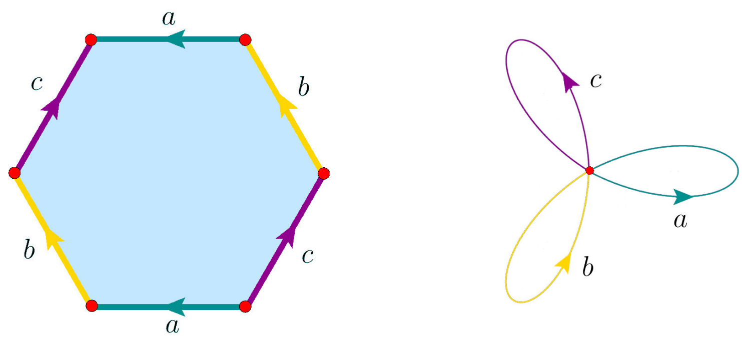
Les documents sont autorisés mais les calculettes et les portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Vrai-Faux. – Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse au moyen de brefs arguments et/ou d'un dessin éclairant.

1.– [2pts] On considère le CW-complexe X composé d'un point, de trois 1-cellules et d'une 2-cellule :

$$X^0 = \{x_0\}, \quad X^1 = \vee_{i=1}^3 \mathbb{S}_i^1 \quad \text{et} \quad X^2 = X$$

et où l'application d'attachement $\varphi : \partial e_2 \longrightarrow X^1$ se déduit de la figure ci-dessous :



La 2-cellule e_2 est un hexagone, les six sommets sont envoyés sur x_0 par φ.

Le groupe fondamental $\pi_1(X, x_0)$ est celui donné en (a) :

$$(a) \ < a, b, c \,|\, abc = cba > \qquad (b) \ < a, b, c \,|\, (abc)^2 = 1 > \qquad (c) \ < a, b, c \,|\, abc^2ba = 1 >$$

2.– [2pts] Le bouquet de deux cercles est l'espace total d'un revêtement à deux feuillets du cercle. Précisément, l'application

$$p : \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

qui est l'identité sur chacun des deux facteurs, est un revêtement.

3.– [2pts] Soit $p : (E, x) \to (B, b)$ un revêtement dont la base est simplement connexe. Alors $\pi_1(E, x)$ est trivial.

4.– [2pts] Soit $p : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}P^2$ le revêtement a deux feuillets obtenu comme l'application quotient de l'action de $\mathbb{Z}_2$ sur la sphère par antipodie. L'application identité $id : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$ se relève en une application $\widetilde{id} : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{S}^2$.

5.– [2pts] On considère le revêtement $p : E \to \mathbb{S}_a^1 \vee \mathbb{S}_b^1$ à trois feuillets illustré ci-dessous. La réflexion r par rapport à l'axe contenant les trois sommets de E est un automorphisme de revêtement.

Problème.– La bouteille de Klein

Revêtement double de la bouteille de Klein
(Image extraite du *Topologicon* de Jean-Pierre Petit).

Partie 1 : Le tore standard de $\mathbb{C}^2$.– Soit $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ le cercle unité. Le *tore standard* de $\mathbb{C}^2$ est l'espace produit $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Il est naturellement paramétré par

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f} : & [0,1] \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ & (x,y) & \longmapsto & (e^{2i\pi x}, e^{2i\pi y}). \end{array}$$

Cette paramétrisation est continue, surjective sa restriction à $]0,1[\times]0,1[$ est injective.

1) On considère le lacet $\omega_T : [0,1] \to [0,1]^2$ basé en $(0,0)$ et défini par

$$\omega_T(s) := \begin{cases} (4s, 0) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{4}] \\ (1, 4s-1) & \text{si } s \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ (3-4s, 1) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ (0, 4-4s) & \text{si } s \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

et l'homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]^2$ donnée par $H(s,t) := t\omega_T(s)$. Faire figurer sur même dessin *soigné* l'image de ω_T puis celles de $s \mapsto H(s, 1/2)$ et $s \mapsto H(s, 0)$.

2) Soient $e = (1,1) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ et $\alpha_T, \beta_T : [0,1] \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ les lacets de T basés en e et donnés par

$$\alpha_T(s) := (e^{2i\pi s}, 1) \quad \text{et} \quad \beta_T(s) := (1, e^{2i\pi s}).$$

Montrer que $\alpha_T * \beta_T * \bar{\alpha}_T * \bar{\beta}_T$ est homotope au lacet constant c_e.

3) On considère la structure de CW-complexe de T composée d'un point, de deux 1-cellules et d'une 2-cellule $e_2 = [0,1]^2$ et donnée par

$$T^0 = \{e\}, T^1 = \left(\mathbb{S}^1 \times \{1\}\right) \cup \left(\{1\} \times \mathbb{S}^1\right), T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$$

et où l'application d'attachement

$$\varphi_T : \partial([0,1]^2) \longrightarrow T^1$$

est la restriction de $\tilde{f}$ à $\partial([0,1]^2)$.
i) Montrer que $\alpha_T * \beta_T * \bar{\alpha}_T * \bar{\beta}_T$ se factorise à travers φ_T.
ii) En déduire qu'une présentation du groupe fondamental de T est

$$\pi_1(T,e) = \langle a_T, b_T | a_T b_T a_T^{-1} b_T^{-1} = 1 \rangle$$

avec $a_T = [\alpha_T]$ et $b_T = [\beta_T]$.

Partie 2 : La bouteille de Klein.– On note (z,w) un point de T. Ceci signifie que $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ et que $|z| = |w| = 1$. Soit $\mathbb{Z}_2$ le groupe multiplicatif $(\{-1,1\},\cdot)$ et soit $\phi : \mathbb{Z}_2 \times T \to T$ l'action donnée par

$$\phi(1,(z,w)) = (z,w) \quad \text{et} \quad \phi(-1,(z,w)) = (-z,\overline{w})$$

L'espace quotient $T/\mathbb{Z}_2$ pour cette action est noté K et appelé la *bouteille de Klein.*

4) i) Montrer que ϕ opère continûment, proprement discontinûment et librement.
ii) Montrer que l'espace quotient $K = T/\mathbb{Z}_2$ est séparé.
iii) Montrer que l'application quotient $p : T \to K$ est un revêtement.
iv) Montrer que le cardinal de la fibre de p est deux.

5) On note $f = p \circ \tilde{f}$.

$$\begin{tikzcd}
{[0,1] \times [0,1]} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & T \arrow[d, "p"] \\
 & K = T/\mathbb{Z}_2
\end{tikzcd}$$

i) Soit $R = [0,\frac{1}{2}] \times [0,1]$ et s la transformation $s(x,y) = (x + \frac{1}{2}, 1-y)$. Montrer que

$$\forall (x,y) \in R, \qquad f(s(x)) = f(x,y).$$

ii) En déduire que f restreinte à R est surjective.
iii) Soit $Int\, R :=]0,\frac{1}{2}[\times]0,1[$. On pose

$$U := f(Int\, R), \quad V_1 := \tilde{f}(Int\, R) \quad \text{et} \quad V_2 = \tilde{f}(s(Int\, R)).$$

Montrer que $V_1 \cap V_2 := \emptyset$
iv) Montrer que $p(V_1) = U$ et $p(V_2) = U$.
v) Montrer que $p^{-1}(U) = V_1 \cup V_2$.
vi) Montrer que f restreinte à $Int\, R =]0,\frac{1}{2}[\times]0,1[$ est bijective.

Partie 3 : Le groupe fondamental de la bouteille de Klein.–

6) On considère sur K les deux chemins de T suivants :

$$\delta_1(s) := (e^{i\pi s}, 1) \quad \text{et} \quad \delta_2(s) := (e^{i\pi(s+1)}, 1), \qquad s \in [0,1],$$

et on note $\alpha_K, \beta_K : [0,1] \to K$ les chemins donnés par

$$\alpha_K := p \circ \delta_1 \quad \text{ et } \quad \beta_K := p \circ \beta_T.$$

i) Montrer que pour tout s on a $\phi(-1, \delta_1(s)) = \delta_2(s)$. En déduire que $p \circ \delta_1 = p \circ \delta_2$
ii) Montrer que α_K et β_K sont des lacets de K basés en $p(e)$.
iii) Montrer que $\alpha_T = \delta_1 * \delta_2$ et $p_*[\alpha_T] = [\alpha_K]^2$.
iv) Déterminer $p_*[\beta_T]$.
v) Le morphisme $p_* : \pi_1(T,e) \longrightarrow \pi_1(K, p(e))$ est-il injectif ?
vi) Déduire de la réponse à la question v) que α_K et β_K ne sont pas homotopes au chemin constant $c_{p(e)}$.

7) On considère la structure de CW-complexe de K composée d'un point, de deux 1-cellules et d'une 2-cellule $e_2 = R = [0, \frac{1}{2}] \times [0,1]$ et donnée par

$$K^0 = \{p(e)\}, K^1 = p\left(\mathbb{S}^1 \times \{1\}\right) \cup p\left(\{1\} \times \mathbb{S}^1\right), K^2 = p(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$$

et où l'application d'attachement

$$\varphi_K : \partial R \to K$$

est la restriction de f à ∂R.

i) Soient $\gamma_i : [0,1] \to R$, $i \in \{1,2\}$, les chemins définis par

$$\gamma_1(s) := (\frac{s}{2}, 0) \quad \text{ et } \quad \gamma_2(s) := (\frac{1-s}{2}, 1).$$

Montrer que $\varphi_K \circ \gamma_1 = \alpha_K$ et que $\varphi_K \circ \gamma_2 = \bar{\alpha}_K$.

ii) Soient $\sigma_i : [0,1] \to R$, $i \in \{1,2\}$, les chemins définis par

$$\sigma_1(s) := (0, 1-s) \quad \text{ et } \quad \sigma_2(s) := (\frac{1}{2}, s).$$

Montrer que $\varphi_K \circ \sigma_1 = \varphi_K \circ \sigma_2 = \bar{\beta}_K$.

iii) Décrire un lacet $\omega_K : [0,1] \to \partial R$ tel que

$$\alpha_K * \bar{\beta}_K * \bar{\alpha}_K * \bar{\beta}_K = \varphi_K \circ \omega_K$$

iv) On admet que K^1 est un bouquet de deux cercles dont $[\alpha_K]$ est un générateur du groupe fondamental du premier cercle et $[\beta_K]$ du second cercle. Déduire des questions précédentes qu'une présentation du groupe fondamental de K est

$$\pi_1(K, p(e)) = \langle a, b | aba^{-1}b = 1 \rangle$$

avec $a = [\alpha_K]$ et $b = [\bar{\beta}_K]$.