Université Claude Bernard Lyon 1

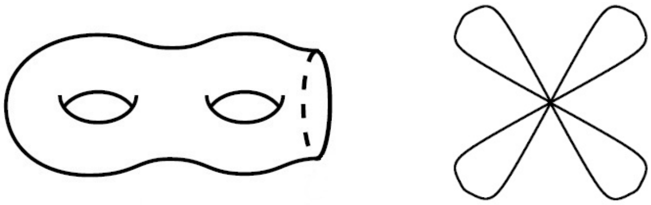
M1G – Topologie Agébrique

Contrôle terminal - Vendredi 29 mai 2026 - durée 2h

Les documents sont autorisés mais les calculettes et les portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Vraie-Faux. – Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse au moyen de brefs arguments et/ou d'un dessin éclairant.

1.– [2pts] On considère le tore à deux trous auquel on a ôté un disque $X = T_2 \setminus D$ ainsi que le bouquet de quatre cercles $Y = \vee_{i=1}^{4} \mathbb{S}_i^1$. On affirme que X et Y sont homotopiquement équivalents.



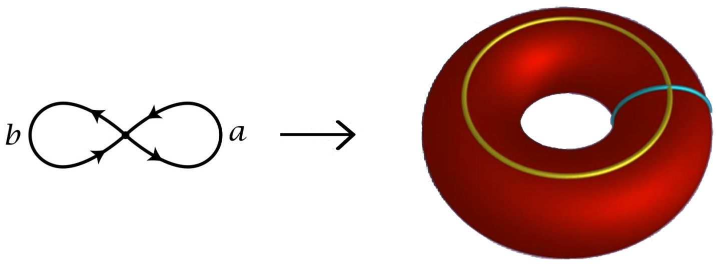
Les espaces X et Y.

2.– [2pts] On affirme que le nombre de feuillets d'un revêtement du ruban de Möbius $\mathbb{M}^2$ par le cylindre $\mathbb{S}^1 \times [-1,1]$ est toujours deux.

3.– [2pts] Soient $p : \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{T}^2$ le revêtement donné par

$$p(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) := (e^{2i\theta_1}, e^{2i\theta_2})$$

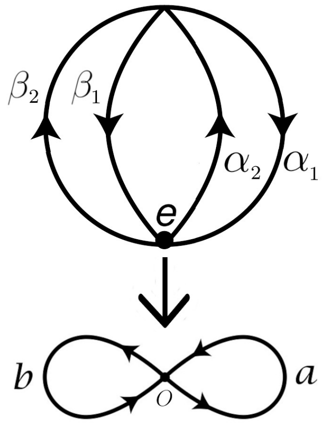
et $f : \mathbb{S}_a^1 \vee \mathbb{S}_b^1 \to \mathbb{T}^2$ l'application qui envoie $\mathbb{S}_a^1$ sur un méridien et $\mathbb{S}_b^1$ sur une latitude.



On affirme qu'il n'est pas possible de relever f en une application continue $\widetilde{f}$:

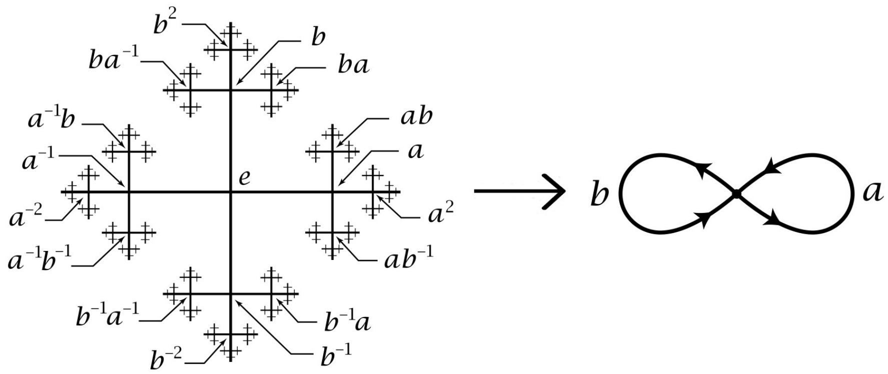
$$\begin{tikzcd} & \mathbb{T}^2 \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{S}_a^1 \vee \mathbb{S}_b^1 \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"] & \mathbb{T}^2 \end{tikzcd}$$

4.– [2pts] On considère le revêtement $p : (E, e) \to (\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, O)$ à deux feuillets du bouquet de deux cercles figuré ci-dessous :



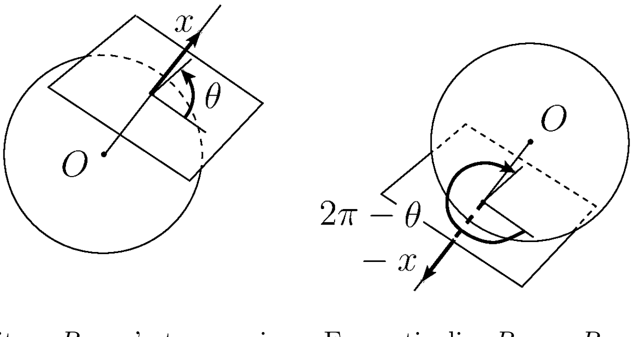
On affirme que $\pi_1(E, e) =< [\beta_2 * \alpha_1], [\alpha_2 * \bar{\beta}_2], [\beta_2 * \beta_1] >$ et $p_*(\pi_1(E, e)) =< ba, ab^{-1}, b^2 >$.

5.– [2pts] On considère le revêtement universel $p : Cay(F_2) \to \mathbb{S}^1_a \vee \mathbb{S}^1_b$ du bouquet de deux cercles par le graphe de Cayley de F_2. On affirme que la rotation r d'angle $\pi/2$ et de centre e est un automorphisme du revêtement p.



Le revêtement universel $p : Cay(F_2) \to \mathbb{S}^1_a \vee \mathbb{S}^1_b$.

Problème.– Le but de ce problème est l'étude des propriétés homotopiques du groupe $SO(3)$ des applications orthogonales directes de $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. On rappelle que les éléments de ce groupe sont l'identité et toutes les rotations $R_{x,\theta}$ où $x = (x_1, x_2, x_3)$ est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ engendrant l'axe de rotation et θ un angle orienté par rapport à x.



L'écriture $R_{x,\theta}$ n'est pas unique. En particulier $R_{x,\theta} = R_{-x,2\pi-\theta}$.

Partie 1 : L'espace projectif $\mathbb{R}P^3$.– On considère l'action du groupe discret $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ par antipodie sur la sphère unité $\mathbb{S}^3$ de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}^3 & \longrightarrow & \mathbb{S}^3 \\ & (g, z) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rl} z & \text{si } g = 1 \\ -z & \text{si } g = -1 \end{array} \right. \end{array}$$

et on note $\mathbb{R}P^3 = \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_2$ l'espace quotient.

1) a) Montrer que $\mathbb{R}P^3 = \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_2$ est séparé.
b) Montrer que l'application quotient $p : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}P^3$ est un revêtement.
c) Montrer que $\mathbb{R}P^3$ est compact.

2) On note $\mathbb{S}^2 = \{z = (x_1, x_2, x_3, y) \in \mathbb{S}^3 \,|\, y = 0\}$ l'équateur de $\mathbb{S}^3$ et $S^3_+ = \{(x_1, x_2, x_3, y) \in \mathbb{S}^3 \,|\, y \geq 0\}$ et $S^3_- = \{(x_1, x_2, x_3, y) \in \mathbb{S}^3 \,|\, y \leq 0\}$ ses deux hémisphères. On a donc $\partial S^3_+ = \partial S^3_- = \mathbb{S}^2$. On se donne également un point base $z_0 = (1, 0, 0, 0)$ pour ces trois espaces.

a) Laquelle des trois applications d'attachement suivantes permet de décomposer $\mathbb{R}P^3$ sous la forme

$$\mathbb{R}P^3 = \mathbb{R}P^2 \cup_\varphi S^3_+ \qquad ?$$

Justifier.

Choix 1.– φ est le revêtement $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}P^2 = \mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_2$ induit par p

Choix 2.– φ est l'application constante $\mathbb{R}P^2 \to \{z_0\} \subset S^3_+$

Choix 3.– φ est l'application constante $\mathbb{S}^2 \to \{[z_0]\} \subset \mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{R}P^3$ où $[z_0] = p(z_0)$ est la classe de z_0 dans $\mathbb{R}P^3$.

b) Soit $proj : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto x$ la projection orthogonale et $D^3 = proj(\mathbb{S}^3)$ la boule unité de $\mathbb{R}^3$. On considère la restriction

$$\psi = proj_{|S^3_+} : S^3_+ \longrightarrow D^3$$

de $proj$ à S^3_+. Montrer que ψ réalise un homéomorphisme entre S^3_+ et D^3. On explicitera l'inverse $\psi^{-1} : D^3 \to S^3_+ \subset \mathbb{S}^3$.

c) Déduire de a) et b) que $\pi_1(\mathbb{R}P^3, [z_0])$ est isomorphe à $\pi_1(\mathbb{R}P^2, [z_0])$.

3) Soit $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$ le chemin donnée par $\gamma(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s, 0, 0)$. On pose $\overline{\gamma} = p \circ \gamma$.
a) Montrer que $\overline{\gamma}$ est un lacet de $\mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{R}P^3$ basé en $[z_0] = p(z_0)$.
b) Montrer que la concaténation $\gamma * (-\gamma)$ est un lacet de $\mathbb{S}^3$ basé en z_0.
c) Utiliser b) pour montrer que $\overline{\gamma} * \overline{\gamma}$ est homotope au lacet constant $c_{[z_0]}$.
d) On admet que $\pi_1(\mathbb{R}P^2, [z_0]) = \pi_1(\mathbb{R}P^3, [z_0]) = \mathbb{Z}_2$ et que $\overline{\gamma}$ est un générateur. Déterminer tous les revêtements pointés connexes par arcs de $(\mathbb{R}P^3, [z_0])$ à isomorphisme (pointé) près.

Partie 2 : Homéomorphisme entre $SO(3)$ et $\mathbb{R}P^3$.– On considère l'espace quotient $D^3/\sim$ où deux points distincts sont dans la même classe ssi ils sont sur le bord de D^3 et antipodaux. On note $q : D^3 \to D^3/\sim$ l'application quotient, $x_0 = (1, 0, 0)$ et $[x_0] = q(x_0)$ les points bases.

4) a) Montrer que $D^3/\sim$ est séparé.
b) Montrer que $D^3/\sim$ est compact.
c) Montrer que

$$f = p \circ \psi^{-1} : D^3 \longrightarrow \mathbb{R}P^3$$

passe au quotient en une application continue $\overline{f} : D^3/\sim \to \mathbb{R}P^3$.
d) Montrer que $\overline{f}$ est bijective.
e) Montrer que $\mathbb{R}P^3$ et $D^3/\sim$ sont homéomorphes.

f) Soient $\mu : [0,1] \to D^3$ donné par $\mu(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s, 0)$ et $\overline{\mu} = q \circ \mu$. Montrer que $\overline{\gamma} = \overline{f} \circ \overline{\mu}$. On pourra s'appuyer sur le diagramme commutatif ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\overline{\mu}"'] & D^3 \arrow[r, "\psi^{-1}"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "f"] & \mathbb{S}^3 \arrow[d, "p"] \\
 & D^3/\sim \arrow[r, "\overline{f}"] & \mathbb{R}P^3
\end{tikzcd}$$

g) En déduire que $\overline{\mu}$ est un générateur du $\pi_1(D^3/\sim, [x_0])$.

5) On définit une application $R : D^3 \to SO(3)$ de la façon suivante. À tout vecteur non nul $x = (x_1, x_2, x_3) \in D^3$ on associe la rotation $R_{x,\theta}$ avec $\theta = \pi\|x\|$. En $x = (0,0,0)$, on prolonge R par continuité en posant $R(0) = id$.

a) Montrer que si $\|x\| = 1$ alors $R(x) = R(-x)$.

b) Montrer que l'application R passe au quotient en une application $\overline{R} : D^3/\sim \to SO(3)$.

c) Déterminer l'image $R_0 = \overline{R}([x_0])$ de $[x_0]$ par $\overline{R}$.

d) En admettant que $\overline{R}$ est un homéomorphisme, déterminer le groupe fondamental $\pi_1(SO(3), R_0)$.

e) Soit $\delta : [0,1] \to SO(3)$ le chemin défini par $\delta(s) = R_{x(s),\pi}$ avec $x(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s, 0)$. Montrer que δ est un lacet générateur du groupe fondamental $\pi_1(SO(3), R_0)$.

Partie Bonus

Partie 3 : Vers l'application cellulaire de $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^1$ dans $SO(3)$.– Pour tout vecteur $v \in \mathbb{S}^2$, on note $r(v) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la réflexion par rapport au plan $v^\perp$:

$$r(v)(y) = -y \text{ si } y \in Vect(v) \quad \text{et} \quad r(v)(y) = y \text{ si } y \in Vect(v)^\perp.$$

Soit $\{v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0), v_3 = (0,0,1)\}$ la base orthonormée directe canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose $\rho(v) = r(v) \circ r(v_3)$. Si $v \neq \pm v_3$ l'application $\rho(v)$ est la rotation $Rot_{v_3 \wedge v, \theta}$ d'axe $Vect(v_3 \wedge v)$ et dont l'angle θ est le double de l'angle orienté entre v_3 et v. Si $v = \pm v_3$ alors $\rho(v) = id$. Dans tous les cas $\rho(v) \in SO(3)$.

6) a) Montrer que $\rho : \mathbb{S}^2 \to SO(3)$ passe au quotient en une application $\overline{\rho} : \mathbb{R}P^2 \to SO(3)$.

b) Montrer que $id \in \overline{\rho}(\mathbb{R}P^2)$.

c) Montrer $\overline{\rho}$ n'est pas surjective en montrant que si $R_{v_3,\theta}$ est une rotation non triviale[1] autour de $Vect(v_3)$ alors $R_{v_3,\theta} \notin \overline{\rho}(\mathbb{R}P^2)$.

d) Soit $u : [0,1] \to \mathbb{R}P^2$ donné par $u(s) = \sin(\pi s) v_1 - \cos(\pi s) v_2$. Montrer que

$$\overline{\rho}(u(s)) = R_{x(s),\pi} \quad \text{où} \quad x(s) = (\cos(\pi s), \sin(\pi s), 0).$$

e) Montrer que $\eta : [0,1] \to SO(3)$, $s \mapsto \overline{\rho}(u(s))$, est un générateur de $\pi_1(SO(3), Id)$

7) Soit $\mathbb{S}^1$ le cercle unité du plan $Vect(v_2, v_3)$. On définit une application $\tau : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \to SO(3)$ par

$$\tau(v, w) = \rho(v)\rho(w).$$

L'application τ est-elle un revêtement de $SO(3)$?

1. C'est-à-dire différente de l'identité