Université Claude Bernard Lyon 1

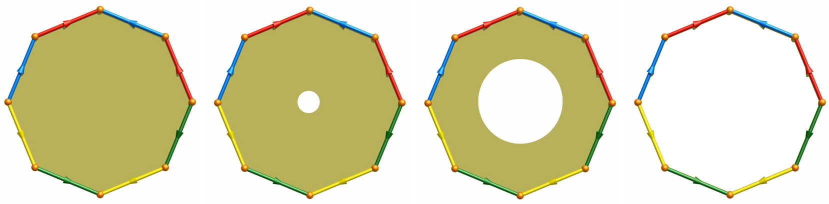
M1G – Topologie Agébrique

Corrigé du contrôle terminal du vendredi 29 mai 2026 - durée 2h

Les documents sont autorisés mais les calculettes et les portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Vraie-Faux. – Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse au moyen de brefs arguments et/ou d'un dessin éclairant.

1.– [2pts] On considère le tore à deux trous auquel on a ôté un disque $X = T_2 \setminus D$ ainsi que le bouquet de quatre cercles $Y = \vee_{i=1}^{4} \mathbb{S}^1_i$. On affirme que X et Y sont homotopiquement équivalents.



La rétration de X sur le bouquet de quatre cercles.

Rép.– AFFIRMATION VRAIE. D'après le cours (TA6), le tore à deux trous s'obtient en identifiant deux à deux les côtés d'un octogone. Si l'on ôte un disque à l'octogone, celui-ci se rétracte par déformation sur son bord. Une fois effectuées les identifications, ce bord se réduit à un bouquet de quatre cercles.

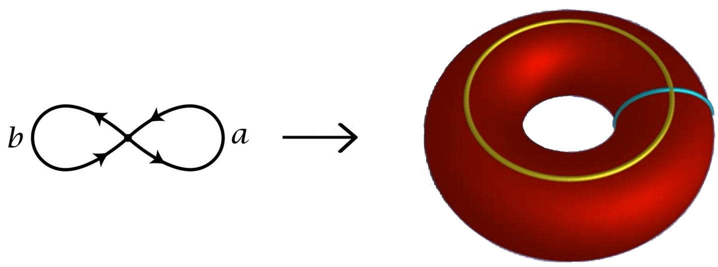
2.– [2pts] On affirme que le nombre de feuillets d'un revêtement du ruban de Möbius $\mathbb{M}^2$ par le cylindre $\mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$ est toujours deux.

Rép.– AFFIRMATION FAUSSE. Il existe bien un revêtement à deux feuillets $p : \mathbb{S}^1 \times [-1, 1] \to \mathbb{M}^2$ du ruban de Möbius. Cependant, on peut le composer par le revêtement à n feuillets $q_n : \mathbb{S}^1 \times [-1, 1] \to \mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$ du cylindre par lui-même pour obtenir un revêtement $q_n \circ p$ à $2n$ feuillets de $\mathbb{M}^2$.

3.– [2pts] Soient $p : \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{T}^2$ le revêtement donné par

$$p(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) := (e^{2i\theta_1}, e^{2i\theta_2})$$

et $f : \mathbb{S}^1_a \vee \mathbb{S}^1_b \to \mathbb{T}^2$ l'application qui envoie $\mathbb{S}^1_a$ sur un méridien et $\mathbb{S}^1_b$ sur une latitude.



On affirme qu'il n'est pas possible de relever f en une application continue $\widetilde{f}$:

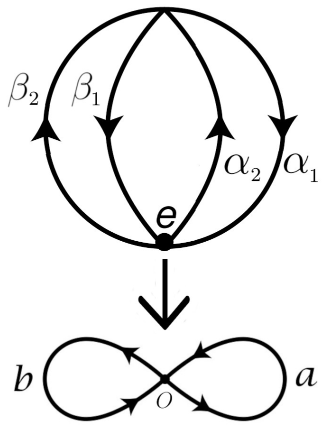
$$\begin{tikzcd} & \mathbb{T}^2 \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{S}^1_a \vee \mathbb{S}^1_b \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{T}^2 \end{tikzcd}$$

Rép.– AFFIRMATION FAUSSE. L'application f se relève ssi

$$f_*\pi_1(\mathbb{S}^1_a \vee \mathbb{S}^1_b, 1) \subset p_*\pi_1(\mathbb{T}^2, (1,1)).$$

On a $\pi_1(\mathbb{T}^2,(1,1)) = \mathbb{Z}^2$ et $\pi_1(\mathbb{S}^1_a \vee \mathbb{S}^1_b, 1) = \langle a, b\rangle \simeq F_2$. Puisque $f_*(a) = (1,0) \in \mathbb{Z}^2$ et $f_*(b) = (0,1) \in \mathbb{Z}^2$ on en déduit que f_* est surjective sur $\pi_1(\mathbb{T}^2,(1,1))$. Or p_* n'est pas surjective puisque $p_*\pi_1(\mathbb{T}^2,(1,1)) = 2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z} = \{(2n, 2m) \,|\, (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$. Ainsi la condition d'inclusion n'est pas satisfaite et par conséquent, f ne se relève pas.

4.– [2pts] On considère le revêtement $p : (E, e) \to (\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, O)$ à deux feuillets du bouquet de deux cercles figuré ci-dessous :



On affirme que $\pi_1(E, e) =< [\beta_2 * \alpha_1], [\alpha_2 * \bar{\beta}_2], [\beta_2 * \beta_1] >$ et $p_*(\pi_1(E,e)) =< ba, ab^{-1}, b^2 >$.

Rép.– AFFIRMATION VRAIE. Un arbre couvrant de E est donné par β_2 et il montre que le groupe fondamental de E est le groupe libre à trois générateurs. L'application d'écrasement

$$f : E \to E/\beta = \vee_{i=1}^3 \mathbb{S}^1_i$$

induit un isomorphisme entre les groupes fondamentaux de E et du bouquet de trois cercles. Si c_1, c_2 et c_3 sont les générateurs naturels (à l'orientation près) du groupe fondamental de $\vee_{i=1}^3 \mathbb{S}^1_i$, les pré-images $f^{-1} \circ c_1$, $f^{-1} \circ c_2$ et $f^{-1} \circ c_3$ donnent des lacets $\beta_2 * \alpha_1$, $\alpha_2 * \bar{\beta}_2$ et $\beta_2 * \beta_1$ qui sont des générateurs du $\pi_1(E, e)$. Ainsi

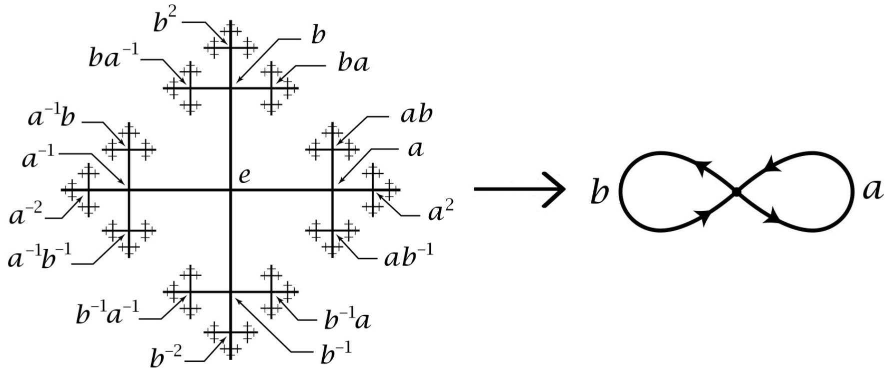
$$\pi_1(E, e) =< [\beta_2 * \alpha_1], [\alpha_2 * \bar{\beta}_2], [\beta_2 * \beta_1] > .$$

Puisque p_* est injective et que

$$p_*[\beta_2 * \alpha_1] = ba, \quad p_*[\alpha_2 * \bar{\beta}_2] = ab^{-1}, \quad p_*[\beta_2 * \beta_1] = b^2$$

on en déduit $p_*(\pi_1(E, e)) =< ba, ab^{-1}, b^2 >$.

5.– [2pts] On considère le revêtement universel $p : Cay(F_2) \to \mathbb{S}^1_a \vee \mathbb{S}^1_b$ du bouquet de deux cercles par le graphe de Cayley de F_2. On affirme que la rotation r d'angle $\pi/2$ et de centre e est un automorphisme du revêtement p.



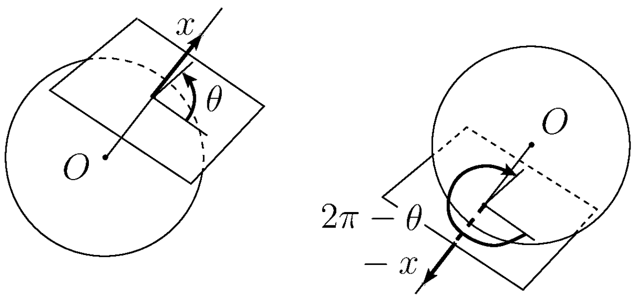
Le revêtement universel $p : Cay(F_2) \to \mathbb{S}^1_a \vee \mathbb{S}^1_b$.

Rép.– AFFIRMATION FAUSSE. La rotation r envoie l'arête $[ea]$ sur l'arête $[eb]$. Or $p([ea]) = \mathbb{S}^1_a$, $p([eb]) = \mathbb{S}^1_b$ et donc

$$p(r([ea])) = p([eb]) = \mathbb{S}^1_b \neq p([ea]) = \mathbb{S}^1_a.$$

Ainsi $p \circ r \neq p$ ce qui montre que r n'est pas un automorphisme du revêtement p.

Problème.– Le but de ce problème est l'étude des propriétés homotopiques du groupe $SO(3)$ des applications orthogonales directes de $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. On rappelle que les éléments de ce groupe sont l'identité et toutes les rotations $R_{x,\theta}$ où $x = (x_1, x_2, x_3)$ est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ engendrant l'axe de rotation et θ un angle orienté par rapport à x.



L'écriture $R_{x,\theta}$ n'est pas unique. En particulier $R_{x,\theta} = R_{-x,2\pi-\theta}$.

Partie 1 : L'espace projectif $\mathbb{R}P^3$.– On considère l'action du groupe discret $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ par antipodie sur la sphère unité $\mathbb{S}^3$ de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}^3 & \longrightarrow & \mathbb{S}^3 \\ & (g, z) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rl} z & \text{si } g = 1 \\ -z & \text{si } g = -1 \end{array} \right. \end{array}$$

et on note $\mathbb{R}P^3 = \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_2$ l'espace quotient.

1) a) Montrer que $\mathbb{R}P^3 = \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_2$ est séparé.
   b) Montrer que l'application quotient $p : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}P^3$ est un revêtement.
   c) Montrer que $\mathbb{R}P^3$ est compact.

Rép.– a) D'après une proposition du cours TA7, si le groupe discret $\mathbb{Z}_2$ opère continûment et proprement discontinûment sur $\mathbb{S}^3$ alors $\mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_2$ est séparé. L'action de $\mathbb{Z}_2$ est continue car les applications $y \to \pm y$ sont clairement continue. L'action est proprement discontinue car $\mathbb{Z}_2$ est un groupe fini.
b) Puisque S^3 est localement compact, d'après un théorème du cours TA7, si le groupe discret $\mathbb{Z}_2$ opère continûment, proprement discontinûment et librement sur $\mathbb{S}^3$ alors l'application quotient $p : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_2$ est un revêtement. D'après le travail effectué précédemment, il ne reste plus qu'à montrer que l'action est libre. Pour cela il faut montrer que si un point y est fixé par l'action de $g \in \mathbb{Z}_2$ alors $g = id$. Or $-y = y$ implique $y = 0 \notin \mathbb{S}^3$. Ainsi $g = -1$ ne fixe aucun point ce qui montre que l'action est libre.
c) L'application quotient est continue par définition de la topologie quotient. L'espace $\mathbb{S}^3$ est compact (fermé et borné) et $\mathbb{R}P^3$ est séparé. Ainsi l'image $p(\mathbb{S}^3) = \mathbb{R}P^3$ est compacte.

2) On note $\mathbb{S}^2 = \{z = (x_1, x_2, x_3, y) \in \mathbb{S}^3 \,|\, y = 0\}$ l'équateur de $\mathbb{S}^3$ et $S^3_+ = \{(x_1, x_2, x_3, y) \in \mathbb{S}^3 \,|\, y \geq 0\}$ et $S^3_- = \{(x_1, x_2, x_3, y) \in \mathbb{S}^3 \,|\, y \leq 0\}$ ses deux hémisphères. On a donc $\partial S^3_+ = \partial S^3_- = \mathbb{S}^2$. On se donne également un point base $z_0 = (1, 0, 0, 0)$ pour ces trois espaces.

a) Laquelle des trois applications d'attachement suivantes permet de décomposer $\mathbb{R}P^3$ sous la forme

$$\mathbb{R}P^3 = \mathbb{R}P^2 \cup_\varphi S^3_+ \qquad ?$$

Justifier.
Choix 1.– φ est le revêtement $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}P^2 = \mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_2$ induit par p
Choix 2.– φ est l'application constante $\mathbb{R}P^2 \to \{z_0\} \subset S^3_+$
Choix 3.– φ est l'application constante $\mathbb{S}^2 \to \{[z_0]\} \subset \mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{R}P^3$ où $[z_0] = p(z_0)$ est la classe de z_0 dans $\mathbb{R}P^3$.

b) Soit $proj : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto x$ la projection orthogonale et $D^3 = proj(\mathbb{S}^3)$ la boule unité de $\mathbb{R}^3$. On considère la restriction

$$\psi = proj_{|S^3_+} : S^3_+ \longrightarrow D^3$$

de $proj$ à S^3_+. Montrer que ψ réalise un homéomorphisme entre S^3_+ et D^3. On explicitera l'inverse $\psi^{-1} : D^3 \to S^3_+ \subset \mathbb{S}^3$.

c) Déduire de a) et b) que $\pi_1(\mathbb{R}P^3, [z_0])$ est isomorphe à $\pi_1(\mathbb{R}P^2, [z_0])$.

Rép.– a) L'application d'attachement doit nécessairement avoir pour espace source un sous-ensemble de S^3_+. Cela élimine le choix 2. Le choix 3 implique que tous les points ∂S^3_+ appartienne à la même classe $[z_0] \in \mathbb{R}P^2$. Cela est grossièrement faux. Il ne reste que le choix 1 qui envoie chaque point de ∂S^3_+ sur sa classe.
b) L'application $\psi : S^3_+ \to D^3$ est bijective, en effet son inverse $\psi^{-1} : D^3 \to S^3_+$ est donnée par

$$(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (x_1, x_2, x_3, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2})$$

Les expressions de ψ et ψ^{-1} montrent que les deux applications sont continues. Ainsi ψ est un homéomorphisme entre S^3_+ et D^3.
c) D'après a) et b) on peut écrire $\mathbb{R}P^3 = \mathbb{R}P^2 \cup_\varphi D^3$. D'après le théorème de l'attachement d'une n-cellule (cours TA6) avec $n = 3$ on a $\pi_1(\mathbb{R}P^3, [z_0]) = \pi_1(\mathbb{R}P^2, [z_0])$.

3) Soit $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$ le chemin donnée par $\gamma(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s, 0, 0)$. On pose $\overline{\gamma} = p \circ \gamma$.

a) Montrer que $\overline{\gamma}$ est un lacet de $\mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{R}P^3$ basé en $[z_0] = p(z_0)$.

b) Montrer que la concaténation $\gamma * (-\gamma)$ est un lacet de $\mathbb{S}^3$ basé en z_0.

c) Utiliser b) pour montrer que $\overline{\gamma} * \overline{\gamma}$ est homotope au lacet constant $c_{[z_0]}$.

d) On admet que $\pi_1(\mathbb{R}P^2, [z_0]) = \pi_1(\mathbb{R}P^3, [z_0]) = \mathbb{Z}_2$ et que $\overline{\gamma}$ est un générateur. Déterminer tous les revêtements pointés connexes par arcs de $(\mathbb{R}P^3, [z_0])$ à isomorphisme (pointé) près.

Rép.– a) On a $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = -z_0$ donc $\overline{\gamma}(0) = p(z_0) = [z_0] = p(-z_0) = \overline{\gamma}(1)$, ce qui montre que $\overline{\gamma}$ est un lacet de $\mathbb{R}P^3$ basé en $[z_0]$. De plus $Im\gamma \subset \mathbb{S}^2$ donc $Im\overline{\gamma} \subset \mathbb{R}P^2$.
b) Puisque $\gamma(1) = -z_0 = -\gamma(0)$ la concaténation $\gamma*(-\gamma)$ est possible. Puisque $\gamma*(-\gamma)(0) = \gamma(0) = z_0$ et $\gamma*(-\gamma)(1) =$

$-\gamma(1) = z_0$, le chemin $\gamma * (-\gamma)$ est un lacet basé en z_0.
c) On a $p(\gamma*(-\gamma)) = p(\gamma)*p(-\gamma) = p(\gamma)*p(\gamma) = \overline{\gamma}*\overline{\gamma}$. Donc $\gamma*(-\gamma)$ est un relevé de $\overline{\gamma}*\overline{\gamma}$. Puisque $\mathbb{S}^3$ est simplement connexe, $\gamma*(-\gamma)$ est homotope au lacet constant c_{z_0}. En composant cette homotopie par p, on obtient une homotopie joignant $\overline{\gamma}*\overline{\gamma}$ à $c_{[z_0]}$.
d) On utilise ici la proposition d'injectivité de la correspondance de Galois vue au cours TA9 : l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{G}: & Rev(\mathbb{R}P^3,[z_0]) & \longrightarrow & Sub(\pi_1(\mathbb{R}P^3,[z_0])) \\ & [(E,e_0) \xrightarrow{p} (\mathbb{R}P^3,[z_0])] & \longmapsto & p_*(\pi_1(E,e_0)) \end{array}$$

est injective. Or $Sub(\mathbb{Z}_2) = \{\{1\},\mathbb{Z}_2\}$. Il est clair que le revêtement trivial $id : (\mathbb{R}P^3,[z_0]) \to (\mathbb{R}P^3,[z_0])$ est tel que $\mathcal{G}(id) = \mathbb{Z}_2$. Il est également évident que le revêtement $p : (\mathbb{S}^3, z_0) \to (\mathbb{R}P^3,[z_0])$ de l'énoncé satisfait $\mathcal{G}(p) = \{1\}$ car $\mathbb{S}^3$ est simplement connexe. Puisque $\mathcal{G}$ est injective, on vient de déterminer les deux seuls revêtements pointés (connexes par arcs) de $(\mathbb{R}P^3,[z_0])$ à isomorphisme (pointé) près.

Partie 2 : Homéomorphisme entre $SO(3)$ et $\mathbb{R}P^3$.– On considère l'espace quotient $D^3/\sim$ où deux points distincts sont dans la même classe ssi ils sont sur le bord de D^3 et antipodaux. On note $q : D^3 \to D^3/\sim$ l'application quotient, $x_0 = (1,0,0)$ et $[x_0] = q(x_0)$ les points bases.

4) a) Montrer que $D^3/\sim$ est séparé.
b) Montrer que $D^3/\sim$ est compact.
c) Montrer que

$$f = p \circ \psi^{-1} : D^3 \longrightarrow \mathbb{R}P^3$$

passe au quotient en une application continue $\overline{f} : D^3/\sim \to \mathbb{R}P^3$.
d) Montrer que $\overline{f}$ est bijective.
e) Montrer que $\mathbb{R}P^3$ et $D^3/\sim$ sont homéomorphes.
f) Soient $\mu : [0,1] \to D^3$ donné par $\mu(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s, 0)$ et $\overline{\mu} = q \circ \mu$. Montrer que $\overline{\gamma} = \overline{f} \circ \overline{\mu}$. On pourra s'appuyer sur le diagramme commutatif ci-dessous

$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\overline{\mu}"'] & D^3 \arrow[r, "\psi^{-1}"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "f"] & \mathbb{S}^3 \arrow[d, "p"] \\ & D^3/\sim \arrow[r, "\overline{f}"] & \mathbb{R}P^3 \end{tikzcd}$$

g) En déduire que $\overline{\mu}$ est un générateur du $\pi_1(D^3/\sim, [x_0])$.

Rép.– a) Puisque D^3 est compact, il suffit de montrer que $\sim$ est fermée. Soit $F \subset D^3$ un fermé de D^3. Si $F \cap \partial D^3 = \emptyset$ alors $q^{-1}(q(F)) = F$ qui est fermé. Si $F_1 = F \cap \partial D^3 \neq \emptyset$ alors $q^{-1}(q(F)) = F \cup -F_1$ est l'union de deux fermés, il est donc fermé. En fin de compte, la relation $\sim$ est fermée et donc $D^3/\sim$ est séparé.
b) L'espace D^3 est compact, l'espace $D^3/\sim$ est séparé et $p : D^3 \to D^3/\sim$ est continue. Ainsi $D^3/\sim = p(D^3)$ est compact.
c) Notons que l'application $\psi : \mathbb{S}^3 \to D^3$ est l'identité sur l'équateur de $\mathbb{S}^3$. Les seules classes non triviales à la source sont les classes $[x] = \{x, -x\}$ où $x = (x_1, x_2, x_3)$ est sur le bord de D^3. Pour un tel x, on a $\psi^{-1}(x) = (x, 0)$ et $\psi^{-1}(-x) = (-x, 0)$ car ψ^{-1} est l'identité sur le bord. Puisque $p(z) = p(-z)$, il en découle que $\overline{f}$ est bien définie. De plus, comme ψ^{-1} et p sont continues, la proposition de transfert de continuité au quotient s'applique et $\overline{f}$ est donc continue.
d) Notons d'abord que f est surjective. En effet, $\psi^{-1} : D^3 \to S^3_+$ est bijective et $p : S^3_+ \to \mathbb{R}P^3$ surjective. Supposons qu'il existe $[x] \neq [x']$ dans $D^3/\sim$ tels que $\overline{f}([x]) = \overline{f}([x'])$. Ceci implique que

$$p \circ \psi^{-1}(x) = p \circ \psi^{-1}(x')$$

car $\overline{f} \circ q = p \circ \psi^{-1}$ et $q(x) = [x]$. Ainsi $\psi^{-1}(x)$ et $\psi^{-1}(x')$ sont dans la même classe et donc

$$\psi^{-1}(x) = \pm \psi^{-1}(x').$$

Le cas $\psi^{-1}(x) = \psi^{-1}(x')$ est impossible car cela entraînerait $x = x'$ car ψ^{-1} est une bijection, et donc $[x] = [x']$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Il faut donc $\psi^{-1}(x) = -\psi^{-1}(x')$. Puisque ψ^{-1} est à valeur dans S^3_+, cela signifie que

$\psi^{-1}(x)$ et $\psi^{-1}(x)$ sont sur le bord de S^3_+. Mais sur le bord, ψ^{-1} est l'identité. On en déduit $x = -x'$. Ceci entraîne $[x] = [x']$. Contradiction. Par conséquent, $\overline{f}$ est injective.
e) Puisque $D^3/\sim$ est un espace compact et que $\mathbb{R}P^3$ est séparé, toute bijection continue $\overline{f} : D^3/\sim \to \mathbb{R}P^3$ de l'un vers l'autre est un homéomorphisme. Les espaces $\mathbb{R}P^3$ et $D^3/\sim$ sont donc homéomorphes.
f) Le seul point à remarquer est que $\gamma = \psi^{-1} \circ \mu$. Il s'en suit que $\overline{\gamma} = p \circ \psi^{-1} \circ \mu$. Et puisque le diagramme est commutatif, c'est aussi $\overline{\gamma} = \overline{f} \circ \overline{\mu}$.
g) Puisque $\overline{f}$ est un homéomorphisme, il induit un isomorphisme

$$\overline{f}_* : \pi_1(D^3/\sim, [x_0]) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^3, [z_0])$$

et puisque $\overline{\gamma}$ est un générateur du $\pi_1(\mathbb{R}P^3, [z_0])$, nécessairement $\overline{\mu} = (\overline{f}_*)^{-1}(\overline{\gamma})$ est aussi un générateur du $\pi_1(D^3/\sim, [x_0])$.

5) On définit une application $R : D^3 \to SO(3)$ de la façon suivante. À tout vecteur non nul $x = (x_1, x_2, x_3) \in D^3$ on associe la rotation $R_{x,\theta}$ avec $\theta = \pi\|x\|$. En $x = (0, 0, 0)$, on prolonge R par continuité en posant $R(0) = id$.

a) Montrer que si $\|x\| = 1$ alors $R(x) = R(-x)$.
b) Montrer que l'application R passe au quotient en une application $\overline{R} : D^3/\sim \to SO(3)$.
c) Déterminer l'image $R_0 = \overline{R}([x_0])$ de $[x_0]$ par $\overline{R}$.
d) En admettant que $\overline{R}$ est un homéomorphisme, déterminer le groupe fondamental $\pi_1(SO(3), R_0)$.
e) Soit $\delta : [0, 1] \to SO(3)$ le chemin défini par $\delta(s) = R_{x(s),\pi}$ avec $x(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s, 0)$. Montrer que δ est un lacet générateur du groupe fondamental $\pi_1(SO(3), R_0)$.

Rép.– a) En effet, si $\|x\| = 1$ alors $R(x) = R_{x,\pi}$ et $R(-x) = R_{-x,-\pi} = R_{x,\pi}$ puisque $R_{x,\theta} = R_{-x,2\pi-\theta}$. Ainsi $R(x) = R(-x)$. On pouvait aussi remarquer que $R_{x,\pi}$ et $R_{-x,-\pi}$ sont des retournements de même axe, donc égaux.
b) Les seules classes non triviales de $D^3/\sim$ sont les paires $\{(x, -x)\}$ avec $\|x\| = 1$. D'après a) l'application R passe au quotient.
c) On a $R(x_0) = R_{x_0,\pi}$ puisque $\|x_0\| = 1$. En passant au quotient, on obtient $R_0 = R_{x_0,\pi}$.
d) D'après la question 1e) les espaces $\mathbb{R}P^3$ et $D^3/\sim$ sont homéomorphes (par $\overline{f}$), si l'on admet que $\overline{R}$ est un homéomorphisme entre $D^3/\sim$ et $SO(3)$ alors $\overline{R} \circ \overline{f}$ est un homéomorphisme entre $\mathbb{R}P^3$ et $SO(3)$. Ainsi le groupe fondamental de $SO(3)$ est isomorphe au groupe fondamental de $\mathbb{R}P^3$. D'après la première partie

$$\pi_1(\mathbb{R}P^3, Id) = \mathbb{Z}_2.$$

e) Le chemin δ est un lacet car $\delta(0) = R_{x_0,\pi} = R_{-x_0,\pi} = \delta(1)$. On constate aussi que $\delta = \overline{R} \circ \overline{\mu}$ où $\overline{\mu}$ est le générateur du $\pi_1(D^3/\sim, [x_0])$ introduit en 4f). Comme $\overline{R} : (D^3/\sim, [x_0]) \to (SO(3), R_0)$ est un homéomorphisme, il s'en suit que δ est un générateur du $\pi_1(SO(3), R_0)$.

Partie Bonus

Partie 3 : Vers l'application cellulaire de $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^1$ dans $SO(3)$.– Pour tout vecteur $v \in \mathbb{S}^2$, on note $r(v) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la réflexion par rapport au plan $v^\perp$:

$$r(v)(y) = -y \text{ si } y \in Vect(v) \quad \text{et} \quad r(v)(y) = y \text{ si } y \in Vect(v)^\perp.$$

Soit $\{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1)\}$ la base orthonormée directe canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose $\rho(v) = r(v) \circ r(v_3)$. Si $v \neq \pm v_3$ l'application $\rho(v)$ est la rotation $Rot_{v_3 \wedge v,\theta}$ d'axe $Vect(v_3 \wedge v)$ et dont l'angle θ est le double de l'angle orienté entre v_3 et v. Si $v = \pm v_3$ alors $\rho(v) = id$. Dans tous les cas $\rho(v) \in SO(3)$.

6) a) Montrer que $\rho : \mathbb{S}^2 \to SO(3)$ passe au quotient en une application $\overline{\rho} : \mathbb{R}P^2 \to SO(3)$.
b) Montrer que $id \in \overline{\rho}(\mathbb{R}P^2)$.
c) Montrer $\overline{\rho}$ n'est pas surjective en montrant que si $R_{v_3,\theta}$ est une rotation non triviale [1] autour

1. C'est-à-dire différente de l'identité

de $Vect(v_3)$ alors $R_{v_3,\theta} \notin \overline{\rho}(\mathbb{R}P^2)$.

d) Soit $u : [0,1] \to \mathbb{R}P^2$ donné par $u(s) = \sin(\pi s)v_1 - \cos(\pi s)v_2$. Montrer que

$$\overline{\rho}(u(s)) = R_{x(s),\pi} \quad \text{où} \quad x(s) = (\cos(\pi s), \sin(\pi s), 0).$$

e) Montrer que $\eta : [0,1] \to SO(3)$, $s \mapsto \overline{\rho}(u(s))$, est un générateur de $\pi_1(SO(3), Id)$

Rép.– a) C'est évident car $r(-v) = r(v)$ donc $\rho(-v) = \rho(v)$ et ρ passe au quotient.
b) On a $\rho(v_3) = r(v_3) \circ r(v_3) = Id$ donc $Id \in \overline{\rho}(\mathbb{R}P^2)$.
c) Si $\rho(v)$ est une rotation autour de v_3 alors $\rho(v)(v_3) = v_3$. Or

$$\rho(v)(v_3) = r(v) \circ r(v_3)(v_3) = r(v)(-v_3)$$

Or $r(v)(-v_3) = v_3$ si et seulement si $v = \pm v_3$. Mais alors $\rho(\pm v_3) = Id$. La rotation est nécessairement triviale.
d) On a $v_3 \wedge u(s) = v_3 \wedge (-\cos(\pi s)v_2 + \sin(\pi s)v_1) = \cos(\pi s)v_1 + \sin(\pi e)v_2 = x(s)$ et $\langle v_3, u(s)\rangle = 0$. Ainsi $\rho(u(s)) = R_{x(s),\pi}$.
e) La question précédente montre que $\overline{\rho}(u(s)) = \delta(s)$. Or on a vu en 5e) que δ est un générateur de $\pi_1(SO(3), Id)$.

7) Soit $\mathbb{S}^1$ le cercle unité du plan $Vect(v_2, v_3)$. On définit une application $\tau : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \to SO(3)$ par

$$\tau(v, w) = \rho(v)\rho(w).$$

L'application τ est-elle un revêtement de $SO(3)$?

Rép.– Supposons que τ soit un revêtement. D'après la question 3d) les seuls revêtements (pointés) de $\mathbb{R}P^3$ sont, à isomorphisme près, l'identité $\mathbb{R}P^3 \to \mathbb{R}P^3$ et le revêtement universel $\mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}P^3$. Puisque $SO(3)$ est homéomorphe à $\mathbb{R}P^3$, il n'admet que deux revêtements (pointés) : l'identité et le revêtement universel. Puisque $\pi_1(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1, *) = \mathbb{Z}$ (quel que soit le point base), l'application τ ne peut être un revêtement universel. Elle doit donc être isomorphe à l'identité. Mais cela est impossible puisque

$$\pi_1(SO(3), R_0) = \mathbb{Z}_2 \neq \pi_1(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1, *) = \mathbb{Z}$$

On en déduit que τ ne peut être un revêtement.
Remarque. – L'application τ passe au quotient en une application $\overline{\tau} : \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^1 \to SO(3)$. Cette application est surjective. Elle est "presque" le revêtement trivial. Précisément, elle induit un homéomorphisme entre

$$(\mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}P^1) \times \mathbb{R}P^1 \longrightarrow SO(3) \setminus SO(2)$$

L'application τ se généralise en dimension quelconque (finie) et permet, par récurrence, de définir une structure de CW complexe sur $SO(n)$ (voir par exemple le livre de Hatcher, p294 et suivantes).