

Topic 2 : Le h -principe

Vincent Borrelli

May 9, 2011

1 Un exemple introductif : les immersions du cercle dans \mathbb{R}^2

On munit \mathbb{R}^2 et $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = [0, 1]/\partial[0, 1]$ d'une orientation. Si $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une immersion de classe C^1 alors son application tangente fournit une application continue

$$\gamma' : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{R} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

dont on peut calculer le nombre de tours $N(\gamma')$. Rappelons que

$$N(\gamma') := \tilde{t}(1) - \tilde{t}(0) \in \mathbb{Z}$$

où $\tilde{t} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est un relevé de

$$t := \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

On définit l'indice $Ind(\gamma)$ de γ comme étant le nombre de tours $N(\gamma')$. Puisque $Ind(\gamma)$ est clairement invariant par homotopie régulière, on a une application :

$$\begin{aligned} Ind : \pi_0(I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [\gamma] &\longmapsto Ind(\gamma). \end{aligned}$$

Cette application est surjective comme le montre l'examen des exemples ci-dessous :



$$Ind(\gamma) = -1 \quad Ind(\gamma) = 0 \quad Ind(\gamma) = 1 \quad Ind(\gamma) = 2 \quad Ind(\gamma) = 3$$

Le point important est que cette application est en réalité une bijection.

Théorème de Whitney-Graustein (1937). – On a : $\pi_0(I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)) \simeq \mathbb{Z}$, l'identification étant donnée par l'indice.

Démonstration du théorème de Whitney-Graustein. – Il suffit d'établir l'injectivité de I . Soient γ_0, γ_1 telle que $N(\gamma'_0) = N(\gamma'_1)$, il existe une homotopie

$$\sigma_t : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathcal{R}$$

telle que $\sigma_0 = \gamma'_0$ et $\sigma_1 = \gamma'_1$ (c'est dire que $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$). On peut en outre supposer que σ est lisse en tant qu'application de $[0, 1] \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathcal{R}$. L'idée est d'intégrer cette homotopie pour obtenir une homotopie régulière joignant γ_0 à γ_1 . Malheureusement

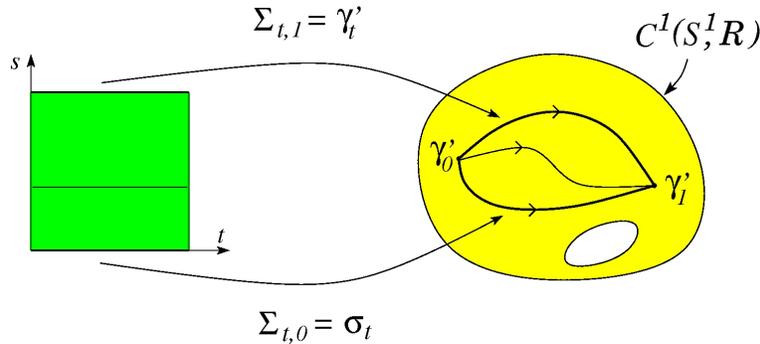
$$\begin{aligned} \Gamma_t : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto \int_0^s \sigma_t(u) du \end{aligned}$$

n'est pas une courbe fermée en général. Nous dirons que σ_t est *holonomique* (ou parfois plus simplement *intégrable*) précisément quand la courbe Γ_t est fermée. La stratégie de la démonstration est de perturber σ_t jusqu'à n'obtenir que des courbes intégrables.

Proposition 1. – Soit $\sigma_t : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{R}$ joignant γ'_0 à γ'_1 , il existe une application

$$\begin{aligned} \Sigma : [0, 1] \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow C^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{R}) \\ (t, s) &\longmapsto \Sigma_{t,s} \end{aligned}$$

telle que $\Sigma_{t,0} = \sigma_t$, $\Sigma_{0,s} = \gamma'_0$, $\Sigma_{1,s} = \gamma'_1$ et $\Sigma_{t,1}$ est holonomique.

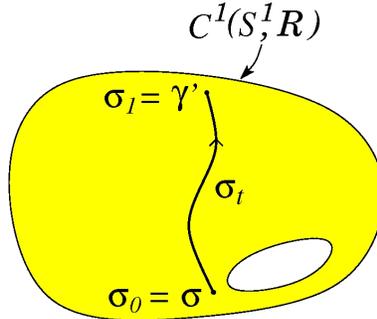


Cette proposition implique le théorème puisque

$$\begin{aligned} \gamma_t : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto \int_0^s \Sigma_{t,1}(u) du \end{aligned}$$

passé au quotient sur $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et fournit ainsi une homotopie régulière $\gamma_t : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ joignant γ_0 à γ_1 . Considérons d'abord une proposition plus simple.

Proposition 2. – Soit $\sigma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{R}$, il existe une homotopie $\sigma_t : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{R}$, telle que $\sigma_0 = \sigma$ et σ_1 soit holonmique.



Démonstration de la proposition 2. – Quitte à effectuer une première homotopie radiale, on peut toujours supposer que $\sigma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, on peut en outre supposer que σ n'est pas une application constante. Soit

$$V = \int_0^1 \sigma(u) du$$

(on a identifié \mathbb{S}^1 à \mathbb{R}/\mathbb{Z}). Puisque le disque unité D^2 est convexe, $V \in \text{Int}(D^2)$ et l'homotopie $\sigma_t = \sigma - tV$ convient. \square

Une version à paramètre de ce raisonnement permet d'obtenir la proposition 1 et donc le théorème de Whitney-Graustein. \square

Notation.– On note $\Gamma(\mathcal{R})$ pour $C^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{R})$ et $\text{Sol}(\mathcal{R}) \subset \Gamma(\mathcal{R})$ le sous-espace des applications holonomes. La proposition 2 signifie que la flèche

$$\pi_0(\text{Sol}(\mathcal{R})) \longrightarrow \pi_0(\Gamma(\mathcal{R}))$$

induite par l'inclusion est surjective ; la proposition 1 dit qu'elle est aussi injective.

Mieux, en changeant les espaces de paramètres dans la proposition 2 il est *facile* de démontrer le résultat suivant :

Théorème.— Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et

$$\Sigma_0 : (B^k, \mathbb{S}^{k-1}) \longrightarrow (\Gamma(\mathcal{R}), \text{Sol}(\mathcal{R}))$$

alors il existe une homotopie relative

$$\Sigma_t : (B^k, \mathbb{S}^{k-1}) \longrightarrow (\Gamma(\mathcal{R}), \text{Sol}(\mathcal{R}))$$

constante au dessus de \mathbb{S}^{k-1} telle que

$$\Sigma_1 : B^k \longrightarrow \text{Sol}(\mathcal{R}).$$

Observation.— La proposition 2 correspond au cas $k = 1$ de ce théorème.

Corollaire.— L'inclusion $\iota : \text{Sol}(\mathcal{R}) \subset \Gamma(\mathcal{R})$ est une équivalence d'homotopie faible.

En effet, le théorème signifie que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \pi_k(\Gamma(\mathcal{R}), \text{Sol}(\mathcal{R})) = 0$$

ce qui implique que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \pi_k(\text{Sol}(\mathcal{R})) \xrightarrow{\iota_*} \pi_k(\Gamma(\mathcal{R}))$$

est un isomorphisme, autrement dit ι est une équivalence d'homotopie faible (e. h. f.).

Rappel.— Si $i : A \longrightarrow X$ alors on a une suite exacte longue en homotopie

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(A) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

où i_* est induite par l'inclusion $A \longrightarrow X$, j_* par l'inclusion $(X, *) \longrightarrow (X, A)$ et ∂ par la restriction $(B^n, \mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow (X, A)$ à \mathbb{S}^{n-1} . Si $n = 0$, les π_0 ne sont pas des groupes et l'adjectif "exacte" doit être compris ensemblistement.

2 Relations différentielles, h -principe

Soient M et N deux variétés. On note $J^1(M, N)$ l'espace des 1-jets de M dans N , c'est-à-dire l'espace des morphismes $Hom(TM, TN)$. Cette espace fibre naturellement sur $M \times N$:

$$\mathcal{L}(T_x M, T_y N) \longrightarrow Hom(TM, TN) \xrightarrow{p} M \times N.$$

On note J l'inclusion naturelle

$$\begin{array}{ccc} J : C^1(M, N) & \longrightarrow & J^1(M, N) \\ f & \mapsto & j^1 f. \end{array}$$

Définition. – Tout sous-ensemble $\mathcal{R} \subset J^1(M, N)$ est appelé une *relation différentielle* (du premier ordre).

Exemple 1. – Soient $M = \mathbb{S}^1$ et $N = \mathbb{R}^2$. On a

$$J^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^2)^*.$$

Une application $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une immersion si et seulement si $\gamma' \neq 0$, *i. e.* pour tout $x \in \mathbb{S}^1$:

$$j^1 \gamma(x) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) =: \mathcal{I}.$$

L'espace \mathcal{I} fibre trivialement sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$, c'est la relation différentielle *des immersions de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^2* .

Exemple 2. – Soit $\mathcal{I} = Mono(TM, TN) \subset J^1(M, N)$. L'espace \mathcal{I} fibre sur $M \times N$, la fibre au dessus de (x, y) étant $\mathcal{I}_{x,y} = Mono(T_x M, T_y N)$. Une application $f : M \rightarrow N$ est une immersion si et seulement si $j^1 f \in \Gamma(\mathcal{I})$ et l'espace \mathcal{I} est appelé la *relation différentielle des immersions de M dans N* .

Exemple 3. – Immersions dont l'application de Gauss est contrainte. Soit $A \subset Gr_{n,m}$ un sous-ensemble de la grassmannienne des m -plans de \mathbb{R}^n . On pose $\mathcal{R}_A = \cup_{(x,y) \in M \times \mathbb{R}^n} \mathcal{R}_{x,y} \subset J^1(M, \mathbb{R}^n)$ où

$$\mathcal{R}_{x,y} = \{L \in \mathcal{L}(T_x M, \mathbb{R}^n) \mid L(T_x M) \in A\}.$$

Une application $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une immersion dont l'application de Gauss $G : M \rightarrow Gr_{n,m}$ est à valeur dans A si et seulement si $j^1 f \in \Gamma(\mathcal{R}_A)$. En particulier, si $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2m} = \mathbb{C}^m$ et :

$$A_{\mathbb{C}} = \{\Pi \in Gr_{2m,m} \mid i\Pi = \Pi\} \text{ alors } \mathcal{R}_{A_{\mathbb{C}}} \text{ est la relation différentielle}$$

des immersions *complexes*,

$A_{Lag} = \{\Pi \in Gr_{2m,m} \mid i\Pi \perp \Pi\}$ alors $\mathcal{R}_{A_{Lag}}$ est la relation différentielle des immersions *lagrangiennes*,

$A_{TR} = \{\Pi \in Gr_{2m,m} \mid i\Pi \cap \Pi = \{0\}\}$ alors $\mathcal{R}_{A_{TR}}$ est la relation différentielle des immersions *totalemt réelles*.

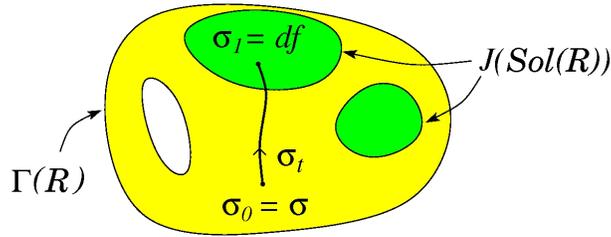
Exemple 4. – Immersions isométriques. Soient (M, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes. On pose $\mathcal{I}_{iso} = MonoIso((TM, g), (TN, h))$. Alors $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ est isométrique si et seulement si $j^1 f \in \Gamma(\mathcal{I}_{iso})$.

Définition. – Une *solution* d'une relation différentielle $\mathcal{R} \subset J^1(M, N)$ est une application $f : M \rightarrow N$ telle que $j^1 f \in \Gamma(\mathcal{R})$.

Notations.– On note $Sol(\mathcal{R})$ l'espace des solutions de \mathcal{R} (muni de la topologie induite par celle de $C^1(M, N)$) et $\Gamma(\mathcal{R})$ l'espace des sections de \mathcal{R} . On a :

$$\begin{array}{ccc} J : Sol(\mathcal{R}) & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{R}) \\ f & \mapsto & j^1 f. \end{array}$$

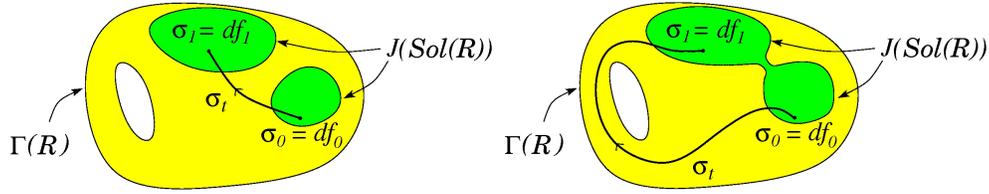
Définition. – Une relation différentielle \mathcal{R} satisfait au *h-principe* si pour toute section $\sigma \in \Gamma(\mathcal{R})$, il existe une homotopie de sections $\sigma_t \in \Gamma(\mathcal{R})$ telle que $\sigma_0 = \sigma$ et $\sigma_1 \in J(Sol(\mathcal{R}))$ (i. e. il existe $f : M \rightarrow N$ telle que $j^1 f = \sigma_1 \in \Gamma(\mathcal{R})$).



Cette définition équivaut à demander que l'application J induise une surjection au niveau du π_0 : $\pi_0(J) : \pi_0(Sol(\mathcal{R})) \twoheadrightarrow \pi_0(\Gamma(\mathcal{R}))$.

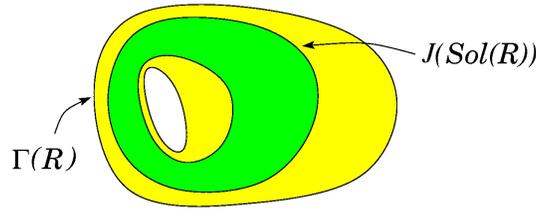
Définition. – Une relation différentielle \mathcal{R} satisfait au *h-principe 1-paramétrique* si \mathcal{R} satisfait au *h-principe* et si pour toute famille de sections $\sigma_t \in \Gamma(\mathcal{R})$ telle que $\sigma_0 = j^1 f_0$ et $\sigma_1 = j^1 f_1$, il existe une homotopie $H : [0, 1]^2 \rightarrow \Gamma(\mathcal{R})$ telle que :

$$H(0, t) = \sigma_t, \quad H(s, 0) = \sigma_0, \quad H(s, 1) = \sigma_1, \quad \text{et} \quad H(1, t) = j^1 f_t.$$



Deux exemples où \mathcal{R} ne satisfait pas au h -principe 1-paramétrique.

Définition. – Une relation différentielle \mathcal{R} satisfait au h -principe paramétrique si $J : \text{Sol}(\mathcal{R}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{R})$ est une équivalence d’homotopie faible.



La relation \mathcal{R} satisfait au h -principe paramétrique.

3 Quelques exemples célèbres

On donne sans démonstration deux théorèmes historiques.

Théorème (Smale-Hirsch 58-59, Gromov 71). – Soient M^m et N^n deux variétés. On suppose que $m < n$ ou, si $m = n$, que M est ouverte. Alors, la relation différentielle des immersions \mathcal{I} satisfait au h -principe paramétrique.

Rappel.– Une variété est dite *fermée* si elle est compacte sans bord, elle est dite *ouverte* si aucune de ses composantes connexes n’est fermée. En particulier une variété connexe dont le bord est non vide est ouverte.

Corollaire.– On peut retourner la sphère standard $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ parmi les immersions.

Démonstration du corollaire.– On note \mathbf{S} la sphère épaissie

$$\mathbf{S} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 - \epsilon^2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1 + \epsilon^2\}$$

où $0 < \epsilon < 1$ est fixé. On munit \mathbf{S} de l'orientation induite par \mathbb{R}^3 . On note ensuite

- $i : \mathbf{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$, l'inclusion naturelle
- $inv : \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$, l'inversion, $x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$
- $s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, la réflexion $s(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, -x_3)$.

On note enfin $I_+(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3)$ (resp. $I_-(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3)$) l'espace des immersions directes (resp. indirectes) de la variété orientée \mathbf{S} dans \mathbb{R}^3 . Le caractère directe ou indirecte d'une immersion se conservant par homotopie régulière, il en découle que le nombre de composantes connexes de $I(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3)$ est au moins deux. Précisément, la flèche

$$\chi : I(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3) = I_+(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3) \cup I_-(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

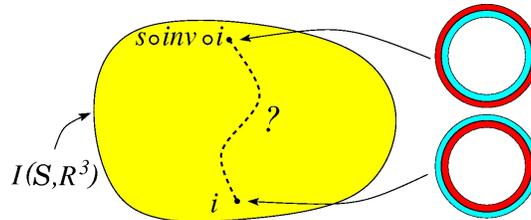
qui envoie l'immersion f sur 0 si $f \in I_+(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3)$ et sur 1 sinon, induit une surjection au niveau des composantes connexes :

$$\pi_0(\chi) : \pi_0(I(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3)) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Démontrer le retournement de la sphère revient à montrer que l'immersion

$$s \circ inv \circ i : \mathbf{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

est dans la même composante de $I_+(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3)$ que i . Pour cela on va montrer que $\pi_0(\chi)$ est une bijection ce qui suffira puisque $\chi(s \circ inv \circ i) = \chi(i)$.



Notons que $inv \circ i$ et i ne peuvent être dans la même composante de $I(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3)$ car ils n'induisent pas la même orientation sur \mathbf{S} . Puisque la variété \mathbf{S} est trivialement parallélisée dans \mathbb{R}^3 , on a

$$J^1(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3) = \mathbf{S} \times \mathbb{R}^3 \times Hom(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) = \mathbf{S} \times \mathbb{R}^3 \times \mathcal{M}_{3 \times 3}$$

et

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_+ \cup \mathcal{I}_-$$

où

$$\mathcal{I}_{\pm} = \mathbf{S} \times \mathbb{R}^3 \times Gl_{\pm}(3, \mathbb{R})$$

sont les deux composantes connexes de \mathcal{I} . En particulier

$$\Gamma(\mathcal{I}) = \Gamma(\mathcal{I}_+) \cup \Gamma(\mathcal{I}_-)$$

avec

$$\Gamma(\mathcal{I}_{\pm}) = C^0(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3 \times Gl_{\pm}(3, \mathbb{R})).$$

Or, \mathbf{S} se rétracte sur \mathbb{S}^2 et $Gl_+(3, \mathbb{R})$ sur $SO(3)$ (Gram-Schmidt), et par conséquent

$$\pi_0(\Gamma(\mathcal{I}_+)) = \pi_2(SO(3)) = 0.$$

De même

$$\pi_0(\Gamma(\mathcal{I}_-)) = 0.$$

Il s'en suit que $\Gamma(\mathcal{I}_+)$ et $\Gamma(\mathcal{I}_-)$ sont deux composantes connexes de $\Gamma(\mathcal{I})$, et puisque $\Gamma(\mathcal{I}) = \Gamma(\mathcal{I}_+) \cup \Gamma(\mathcal{I}_-)$, ce sont les seules. Puisque \mathcal{I} satisfait au h -principe paramétrique, on a

$$I(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3) = Sol(\mathcal{I}) \stackrel{e.h.f}{\sim} \Gamma(\mathcal{I})$$

et donc

$$\pi_0(I(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3)) = \pi_0(Sol(\mathcal{I})) = \pi_0(\Gamma(\mathcal{I})).$$

Ainsi le nombre de composantes connexes de $I(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3)$ est deux et par conséquent $\pi_0(\chi)$ est nécessairement bijective. \square

Théorème (Nash-Kuiper 54-55, Gromov 86 ?). – Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes. On suppose que $m < n$. Alors, la relation différentielle des immersions C^1 isométriques \mathcal{I}_{iso} satisfait au h -principe paramétrique.

Corollaire. – Soit Λ un réseau de \mathbb{E}^2 . Il existe un immersion isométrique C^1 du tore plat \mathbb{E}^2/Λ dans \mathbb{E}^3 .

Observation. – En fait, on peut même demander que l'immersion isométrique soit un *plongement*.

Démonstration du corollaire. – Le tore \mathbb{E}^2/Λ est évidemment parallélisable et donc

$$J^1(\mathbb{E}^2/\Lambda, \mathbb{R}^3) = \mathbb{E}^2/\Lambda \times \mathbb{R}^3 \times Hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3) = \mathbb{E}^2/\Lambda \times \mathbb{R}^3 \times V_{2,3}$$

où $V_{2,3}$ est la variété de Stiefel des 2-repères de \mathbb{R}^3 . En effet, si (v_1, v_2) est une base orthonormée globale de $T(\mathbb{E}^2/\Lambda)$ alors la flèche

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3) & \longrightarrow & V_{2,3} \\ L & \longmapsto & (L(v_1), L(v_2)) \end{array}$$

permet d'identifier les deux espaces. De façon analogue

$$\mathcal{I}_{iso} = \mathbb{E}^2/\Lambda \times \mathbb{R}^3 \times V_{2,3}^{o.n.} = \mathbb{E}^2/\Lambda \times \mathbb{R}^3 \times SO(3).$$

où $V_{2,3}^{o.n.} \approx SO(3)$ est la variété de Stiefel des 2-repères orthonormés de \mathbb{R}^3 . On a

$$I_{iso}(\mathbb{E}^2/\Lambda, \mathbb{R}^3) = \text{Sol}(\mathcal{I}_{iso}) \stackrel{e.h.f.}{\sim} \Gamma(\mathcal{I}_{iso}) = C^0(\mathbb{E}^2/\Lambda, \mathbb{R}^3 \times SO(3)).$$

En particulier, l'espace $I_{iso}(\mathbb{E}^2/\Lambda, \mathbb{R}^3)$ ne peut être vide puisque l'espace $C^0(\mathbb{E}^2/\Lambda, \mathbb{R}^3 \times SO(3))$ ne l'est pas. \square

Voici deux autres résultats paradoxaux se déduisant du théorème :

- Il existe un plongement C^1 isométrique de la sphère unité de \mathbb{R}^3 dans une boule de rayon arbitrairement petit.
- On peut retourner la sphère \mathbb{S}^2 parmi les immersions isométriques C^1 .

4 Deux théorèmes de Gromov assurant un h -principe

Action de $Diff(M)$ sur $J^1(M, N)$. – Soit $\varphi \in Diff(M)$, alors φ agit sur $J^1(M, N)$ par :

$$\varphi_*(x, y, L) = (\varphi(x), y, L \circ d\varphi_{\varphi(x)}^{-1}).$$

Si f est telle que $j^1 f(x) = (x, y, L)$ alors :

$$\varphi_*(j^1 f(x)) = (\varphi(x), f(x), df_x \circ d\varphi_{\varphi(x)}^{-1}) = j^1(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)).$$

Définition. – Une relation différentielle \mathcal{R} est $Diff(M)$ -invariante si pour tout $\varphi \in Diff(M)$, $\varphi_*(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.

Observation. – La relation \mathcal{I} des immersions est $Diff(M)$ -invariante mais pas \mathcal{I}_{iso} .

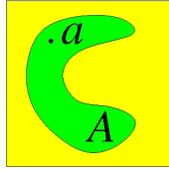
Théorème 1 (Gromov 69-71). – Soit M une variété ouverte et \mathcal{R} une relation différentielle ouverte et $\text{Diff}(M)$ -invariante, alors \mathcal{R} satisfait au h -principe paramétrique i.e.

$$J : \text{Sol}(\mathcal{R}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R})$$

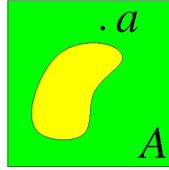
est une équivalence d'homotopie faible.

Amplitude d'une partie de \mathbb{R}^n . – Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, on note $\text{IntConv}(A, \alpha)$ l'intérieur de l'enveloppe convexe de la composante connexe de A qui contient α .

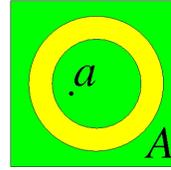
Définition. – Une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est *ample* si pour tout $\alpha \in A$ on a : $\text{IntConv}(A, \alpha) = \mathbb{R}^n$. En particulier $A = \emptyset$ est ample.



A est non ample



A est ample



A est non ample.

Exemple.– Un sous-espace vectoriel F de \mathbb{R}^n est ample si et seulement si $\text{Codim } F \geq 2$.

Amplitude d'une relation $\mathcal{R} \subset J^1(M, N)$. – Localement $J^1(M, N)$ s'identifie à :

$$J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \prod_{i=1}^m \mathbb{R}^n,$$

où \mathcal{U} et \mathcal{V} sont des cartes de M et N . On note (x, y, v_1, \dots, v_m) un élément de $J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ et on pose :

$$J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})^\perp = \{(x, y, v_1, \dots, v_{m-1})\},$$

ainsi $J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})^\perp \times \mathbb{R}^n$. On note p^\perp la projection sur le premier facteur et $\mathcal{R}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} \subset J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ l'image de $\mathcal{R} \subset J^1(M, N)$ par l'identification locale. Schématiquement, on a :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} & \longrightarrow & J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \\ & & \downarrow p^\perp \\ & & J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})^\perp. \end{array}$$

Enfin, si $z \in J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})^\perp$, on pose : $\mathcal{R}_z = (p^\perp)^{-1}(z) \cap \mathcal{R}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}$.

Définition. – Une relation différentielle $\mathcal{R} \subset J^1(M, N)$ est *ample* si pour toute identification locale $J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, et pour tout $z \in J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})^\perp$, \mathcal{R}_z est ample dans $(p^\perp)^{-1}(z) \simeq \mathbb{R}^n$.

Remarque. – Evidemment, cette définition ne dépend pas de la carte choisie puisqu'on les prend toutes...

Proposition. – *La relation différentielle \mathcal{I} des immersions de M^m dans N^n est ample si $n > m$.*

Démonstration. – Soit $J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \prod_{i=1}^m \mathbb{R}^n$ une représentation locale. Alors

$$(x, y, v_1, \dots, v_m) \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} \iff (v_1, \dots, v_m) \text{ est libre dans } \mathbb{R}^n.$$

Soit $z = (x, y, v_1, \dots, v_{m-1}) \in J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})^\perp$.

1) Si (v_1, \dots, v_{m-1}) sont linéairement indépendants alors :

$$\begin{aligned} v_m \in (p^\perp)^{-1}(z) \text{ est dans } \mathcal{R}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} &\iff v_m \notin \text{Vect}(v_1, \dots, v_{m-1}) =: \Pi \\ &\iff v_m \in \mathbb{R}^n \setminus \Pi. \end{aligned}$$

Ainsi : $\mathcal{R}_z = \mathcal{R}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} \cap (p^\perp)^{-1}(z) = \mathbb{R}^n \setminus \Pi$. Or la codimension de Π est $n - (m - 1) \geq 2$, donc \mathcal{R}_z est ample.

2) Si (v_1, \dots, v_{m-1}) sont liés alors $\mathcal{R}_z = \emptyset$ et donc \mathcal{R}_z est ample. \square

Théorème 2 (Gromov 69-73). – *Si \mathcal{R} est ouverte et ample, alors \mathcal{R} satisfait au h-principe paramétrique i.e.*

$$J : \text{Sol}(\mathcal{R}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R})$$

est une équivalence d'homotopie faible.

Remarque. – Ici, pas d'hypothèse sur la variété M .