Topic 3 : Relations amples, relations fermées

Vincent Borrelli

May 16, 2011

1 Une proposition fondamentale

Lors de la séance du 23 mars du *Topic*, nous avions établi un résultat qui est un peu plus précis que ce qui est énoncé dans le document *Topic 2* :

Proposition.– *Soient $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $E = C \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} C$ le fibré trivial sur le cube $C = [0,1]^m$, $\sigma \in \Gamma(\mathcal{R})$ et $f_0 : C \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :*

$$\forall c = (c_1, ..., c_m) \in [0,1]^m, \quad \frac{\partial f_0}{\partial c_m}(c) \in \ IntConv(\mathcal{R}_c, \sigma(c))$$

où $\mathcal{R}_c = \pi^{-1}(c) \cap \mathcal{R}$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $f : C \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

i) $\dfrac{\partial f}{\partial c_m} \in \Gamma(\mathcal{R})$

ii) $\dfrac{\partial f}{\partial c_m}$ *est homotope à σ dans $\Gamma(\mathcal{R})$*

iii) $\|f - f_0\|_{C^{1,\widehat{m}}} \leq \epsilon$.

Notation.– Dans cet énoncé, on a noté

$$\|f\|_{C^{1,\widehat{m}}} = \max(\|f\|_{C^0}, \|\frac{\partial f}{\partial c_1}\|_{C^0}, ..., \|\frac{\partial f}{\partial c_{m-1}}\|_{C^0})$$

la norme C^1 sans le terme $\|\dfrac{\partial f}{\partial c_m}\|_{C^0}$.

Démonstration.– Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $c = (c_1, ..., c_m) \in C$, on définit

$$f(c_1, ..., c_m) := f_0(c_1, ..., c_{m-1}, 0) + \int_0^{c_m} h(c_1, ..., c_{m-1}, s, Ns)ds.$$

On a
$$\frac{\partial f}{\partial c_m}(c_1,...,c_m) = h(c_1,...,c_{m-1},c_m,Nc_m) \in \mathcal{R}_c$$
et $\frac{\partial f}{\partial c_m}(c_1,...,c_m)$ est homotope à $\sigma(c)$ par
$$\sigma_u(c) := h_u(c_1,...,c_{m-1},c_m,Nc_m)$$
où $h_u : [0,1] \longrightarrow \mathcal{R}$ l'application définie par
$$h_u(s) = \begin{cases} h(s) & \text{si} \quad s \in [0,\frac{u}{2}] \cup [1-\frac{u}{2}] \\ h(u) & \text{si} \quad s \in [\frac{u}{2}, 1-\frac{u}{2}]. \end{cases}$$
Rappelons que l'application h est choisie parmi les lacets qui sont des aller-retour et remarquons au passage que l'homotopie ainsi définie rétracte $\Omega_\sigma^{AR}(\mathcal{R})$ sur l'application constante. La démonstration de la proposition 1 du document *Topic 1* montre que
$$\|f - f_0\|_{C^0} = O\left(\frac{1}{N}\right).$$
En reprenant la même démarche, on montre que l'on a également
$$\|\frac{\partial f}{\partial c_j} - \frac{\partial f_0}{\partial c_j}\|_{C^0} = O\left(\frac{1}{N}\right)$$
pour tout $j \in \{1,...,m-1\}$. □

2 Amplitude d'une relation différentielle

Rappelons que si $A \subset \mathbb{R}^n$, on note $IntConv(A,\alpha)$ l'intérieur de l'enveloppe convexe de la composante connexe de A qui contient α. On dit que $A \subset \mathbb{R}^n$ est *ample* si pour tout $\alpha \in A$ on a $IntConv(A,\alpha) = \mathbb{R}^n$. En particulier $A = \emptyset$ est ample.

Soient M et N deux variétés. On note $J^1(M,N)$ l'espace des 1-jets de M dans N, c'est-à-dire l'espace des morphismes $Hom(TM,TN)$. Cette espace fibre naturellement sur $M \times N$:
$$\mathcal{L}(T_xM, T_yN) \longrightarrow Hom(TM,TN) \xrightarrow{p} M \times N.$$
On note J l'inclusion naturelle
$$\begin{array}{rccc} J: & C^1(M,N) & \longrightarrow & J^1(M,N) \\ & f & \longmapsto & j^1 f. \end{array}$$

Amplitude d'une relation $\mathcal{R} \subset J^1(M,N)$. – Localement $J^1(M,N)$ s'identifie à :

$$J^1(\mathcal{U},\mathcal{V}) = \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) = \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \prod_{i=1}^{m} \mathbb{R}^n,$$

où $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont des cartes de M et N. On note $(x, y, v_1, ..., v_m)$ un élément de $J^1(\mathcal{U},\mathcal{V})$ et on pose :

$$J^1(\mathcal{U},\mathcal{V})^\perp = \{(x, y, v_1, ..., v_{m-1})\},$$

ainsi $J^1(\mathcal{U},\mathcal{V}) = J^1(\mathcal{U},\mathcal{V})^\perp \times \mathbb{R}^n$. On note $p^\perp$ la projection sur le premier facteur et $\mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}} \subset J^1(\mathcal{U},\mathcal{V})$ l'image de $\mathcal{R} \subset J^1(M,N)$ par l'identification locale. Schématiquement, on a :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}} & \longrightarrow & J^1(\mathcal{U},\mathcal{V}) \\ & & \downarrow p^\perp \\ & & J^1(\mathcal{U},\mathcal{V})^\perp. \end{array}$$

Enfin, si $z \in J^1(\mathcal{U},\mathcal{V})^\perp$, on pose : $\mathcal{R}^\perp_z = (p^\perp)^{-1}(z) \cap \mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$. Notons que la relation $\mathcal{R}^\perp$ est une relation différentielle du fibré $J^1(\mathcal{U},\mathcal{V}) \xrightarrow{p^\perp} J^1(\mathcal{U},\mathcal{V})^\perp$.

Définition. – Une relation différentielle $\mathcal{R} \subset J^1(M,N)$ est *ample* si pour toute identification locale $J^1(\mathcal{U},\mathcal{V})$, et pour tout $z \in J^1(\mathcal{U},\mathcal{V})^\perp$, $\mathcal{R}^\perp_z$ est ample dans $(p^\perp)^{-1}(z) \simeq \mathbb{R}^n$.

Remarque. – Evidemment, cette définition ne dépend pas de la carte choisie puisqu'on les prend toutes...

Proposition. – *La relation différentielle $\mathcal{I}$ des immersions de M^m dans N^n est ample si $n > m$.*

Démonstration. – Soit $J^1(\mathcal{U},\mathcal{V}) = \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \prod_{i=1}^m \mathbb{R}^n$ une représentation locale. Alors

$$(x, y, v_1, ..., v_m) \in \mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}} \iff (v_1, ..., v_m) \text{ est libre dans } \mathbb{R}^n.$$

Soit $z = (x, y, v_1, ..., v_{m-1}) \in J^1(\mathcal{U},\mathcal{V})^\perp$.

- Si $(v_1, ..., v_{m-1})$ sont linéairement indépendants alors :

$$\begin{array}{rcl} v_m \in (p^\perp)^{-1}(z) \text{ est dans } \mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}} & \iff & v_m \notin Vect(v_1, ..., v_{m-1}) =: \Pi \\ & \iff & v_m \in \mathbb{R}^n \setminus \Pi. \end{array}$$

Ainsi : $\mathcal{R}_z^\perp = \mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}} \cap (p^\perp)^{-1}(z) = \mathbb{R}^n \setminus \Pi$. Or la codimension de Π est $n-(m-1) \geq 2$, donc $\mathcal{R}_p^\perp$ est ample.

- Si $(v_1, ..., v_{m-1})$ sont liés alors $\mathcal{R}_p^\perp = \emptyset$ et donc $\mathcal{R}_p^\perp$ est ample. $\square$

3 Un h-principe pour les relations amples

Théorème (Gromov 69-73). – *Si $\mathcal{R}$ est ouverte et ample, alors $\mathcal{R}$ satisfait au h-principe paramétrique i.e.*

$$J : \mathcal{S}ol(\mathcal{R}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R})$$

est une équivalence d'homotopie faible.

Une conséquence immédiate.– Il découle de la proposition précédente et de ce théorème que la relation différentielle des immersions de M^m dans N^n avec $n > m$ satisfait au h-principe paramétrique. Un calcul homotopique montre que si $M^m = \mathbb{S}^2$ et $N^n = \mathbb{R}^3$ alors

$$\pi_0(I(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3)) = \pi_2(Gl_+(3, \mathbb{R})) = 0.$$

Lignes directrices de la démonstration.– On travaille d'abord localement sur un cube $C = [0,1]^m$ de M et un ouvert $\mathcal{V} \approx \mathbb{R}^n$ de N. Une section $\sigma \in \mathcal{R}_{C,\mathbb{R}^n} \subset J^1(C, \mathbb{R}^n)$ s'écrit :

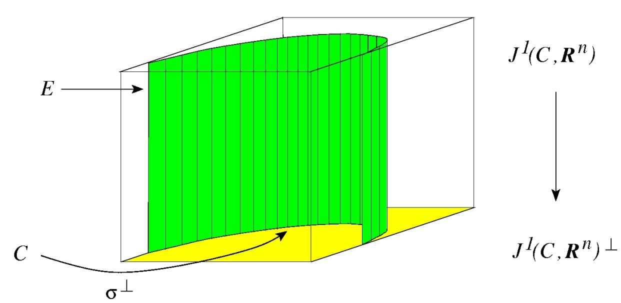
$$\sigma : c \longmapsto (c, f_0(c), v_1(c), ..., v_m(c)) \in \mathcal{R}_{C,\mathbb{R}^n}.$$

Notons $\pi^{\perp_m}$ la projection

$$(c, y, v_1, ..., v_m) \longmapsto (c, y, v_1, ..., v_{m-1})$$

puis $\mathcal{R}_z^{\perp_m} = \mathcal{R}_{C,\mathbb{R}^n} \cap (p^{\perp_m})^{-1}(z)$ pour tout $z = (b, y, v_1, ..., v_{m-1}) \in J^1(C, \mathbb{R}^n)^{\perp_m}$. On pose

$$\begin{array}{rccc} \sigma^{\perp_m} : & C & \longrightarrow & J^1(C, \mathbb{R}^n)^{\perp_m} \\ & c & \longmapsto & (c, f_0(c), v_1(c), ..., v_{m-1}(c)) \end{array}$$



et on note E le tiré en arrière du fibré $(p^{\perp_m}, J^1(C,\mathbb{R}^n), J^1(C,\mathbb{R}^n)^{\perp_m})$:

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & J^1(C,\mathbb{R}^n) \\ \pi\downarrow & & \downarrow p^{\perp_m} \\ C & \xrightarrow{\sigma^{\perp_m}} & J^1(C,\mathbb{R}^n)^{\perp_m} \end{array}$$

Soit $\mathcal{S}^m \subset E$ le tiré en arrière de $\mathcal{R}^{\perp_m}$. La relation $\mathcal{S}^m$ est évidemment ouverte et ample. D'autre part $v_m : C \longrightarrow \mathbb{R}^n$ fournit une section de $\mathcal{S}^m$ au dessus de C. On utilise maintenant la proposition rappelée dans l'introduction de ce document, l'espace des paramètres étant $C := [0,1]^m$ et la relation différentielle $\mathcal{S}^m$. Il existe donc $h : C \times [0,1] \xrightarrow{C^\infty} \mathcal{S}^m$ telle que :

$$h(.,0) = h(.,1) = v_m \in \Gamma^\infty(\mathcal{S}^m), \quad \forall c \in C,\ h(c,.) \in \Omega^{AR}_{v_m(c)}(\mathcal{S}^m_c)$$

et

$$\forall c \in C,\ \int_0^1 h(c,s)ds = \frac{\partial f_0}{\partial c_m}(c).$$

On pose

$$F_1(c) := f_0(c_1,...,c_{m-1},0) + \int_0^{c_m} h(c_1,...,c_{m-1},s,N_1 s)ds.$$

On montre alors que

$$\|F_1 - f_0\| = O(\frac{1}{N_1})$$

et même, plus encore, que

$$\|F_1 - f_0\|_{C^1,\widehat{m}} = O(\frac{1}{N_1})$$

où

$$\|f\|_{C^1,\widehat{m}} = \max(\|f\|_{C^0}, \|\frac{\partial f}{\partial c_1}\|_{C^0}, ..., \|\frac{\partial f}{\partial c_{m-1}}\|_{C^0})$$

est la norme C^1 sans le terme $\|\frac{\partial f}{\partial c_m}\|_{C^0}$. Cette dernière subtilité ne nous servira pas tout de suite, mais à la prochaine étape. Par définition de $\mathcal{S}^m$, la section

$$c \mapsto (c, f_0(c), v_1(c), ..., v_{m-1}(c), \frac{\partial F_1}{\partial c_m}(c))$$

est dans la relation $\mathcal{R}_{C,\mathbb{R}^n}$. Puisque que $\mathcal{R}_{C,\mathbb{R}^n}$ est ouverte et que F_1 est C^0-proche de f_0, quitte à augmenter N_1, on peut supposer que

$$c \mapsto (c, F_1(c), v_1(c), ..., v_{m-1}(c), \frac{\partial F_1}{\partial c_m}(c))$$

est une section de $\mathcal{R}_{C,\mathbb{R}^n}$. On recommence par rapport à l'avant-dernière variable pour obtenir :

$$c \mapsto (c, F_1(c), v_1(c), ..., v_{m-2}(c), \frac{\partial F_2}{\partial c_{m-1}}(c), \frac{\partial F_1}{\partial c_m}(c)) \in \mathcal{R}_{C,\mathbb{R}^n}.$$

En remarquant que $\mathcal{R}_{C,\mathbb{R}^n}$ est ouverte et que F_2 et F_1 sont $(C^1, \widehat{c_{m-1}})$-proches, on peut toujours supposer que :

$$c \mapsto (c, F_2(c), v_1(c), ..., v_{m-2}(c), \frac{\partial F_2}{\partial c_{m-1}}(c), \frac{\partial F_2}{\partial c_m}(c)) \in \mathcal{R}_{C,\mathbb{R}^n},$$

et ainsi de suite jusqu'à obtenir une section complètement intégrée, autrement dit une solution $F := F_m$ au dessus de C qui est C^0-proche de f_0 :

$$\|F - f_0\|_{C^0} = O(\frac{1}{N_1} + ... + \frac{1}{N_m}).$$

Pour obtenir une solution définie sur tout M^m, on recouvre la variété de cubes et on applique le procédé précédent récursivement sur chaque cube. Bien sûr, le problème qui se pose est celui du recollement des solutions à chaque étape. Précisément, si C est un ouvert cubique, K un compact de C et si f_0 est déjà solution sur un voisinage ouvert $Op(K)$ de K, il s'agit d'obtenir une solution f qui prolonge f_0 sur C. Pour cela on va devoir modifier chacune des intégrations convexes $F_1, ..., F_m$. Soit $\lambda_1 : C \longrightarrow [0, 1]$ une fonction C^∞ à support compact telle que

$$\lambda_1(c) = \begin{cases} 1 & \text{si } c \in Op_1(K) \subset Op(K) \\ 0 & \text{si } c \in C \setminus Op(K). \end{cases}$$

où $Op_1(K)$ est un voisinage ouvert de K plus petit que $Op(K)$. Soit F_1 la solution précédente au dessus de C construite à partir de

$$\sigma : c \longmapsto (c, f_0(c), v_1(c), ..., v_m(c)) \in \mathcal{R}_{C,\mathbb{R}^n}.$$

On pose

$$f_1 := F_1 + \lambda_1(f_0 - F_1).$$

Soit $j \in \{1, ..., m\}$, on a

$$\frac{\partial f_1}{\partial c_j} = \frac{\partial F_1}{\partial c_j} + \lambda_1.\left(\frac{\partial f_0}{\partial c_j} - \frac{\partial F_1}{\partial c_j}\right) + \frac{\partial \lambda_1}{\partial c_j}.(f_0 - F_1).$$

Puisque λ_1 est à support compact, le terme $\dfrac{\partial \lambda_1}{\partial c_j}$ est bornée quel que soit $j \in \{1, ..., m\}$. Puisque F_1 et f_0 sont $(C^1, \widehat{m})$-proches on en déduit que pour tout $j \in \{1, ..., m-1\}$, on a

$$\|f_1 - F_1\|_{C^1, \widehat{m}} = O(\frac{1}{N_1}).$$

En revanche le terme

$$\frac{\partial f_1}{\partial c_m} - \frac{\partial F_1}{\partial c_m}$$

n'a aucune raison d'être petit en général, et précisément, c'est lui qui importe si l'on veut que

$$c \longmapsto \left(c, \frac{\partial f_1}{\partial c_m}(c)\right)$$

soit une solution de $\mathcal{S}^m$. En effet, $\mathcal{S}^m$ étant ouverte et $c \longmapsto \dfrac{\partial F_1}{\partial c_m}(c)$ étant déjà une solution de $\mathcal{S}^m$, il suffirait que $\dfrac{\partial f_1}{\partial c_m}$ et $\dfrac{\partial F_1}{\partial c_m}$ soient C^0-proches pour conclure. La petitesse de

$$\left\|\frac{\partial f_1}{\partial c_m} - \frac{\partial F_1}{\partial c_m}\right\|_{C^0}$$

dépend de celle de

$$\left\|\frac{\partial f_0}{\partial c_m} - \frac{\partial F_1}{\partial c_m}\right\|$$

sur $Op(K)$. On montre alors que l'on peut toujours choisir la famille de chemins h globalement avec pour contrainte qu'au dessus de $Op(K)$ elle soit égal à la famille des chemins constants $\dfrac{\partial f_0}{\partial c_m}$ *i. e.*

$$\forall c \in Op(K),\ h(c, s) = \frac{\partial f_0}{\partial c_m}(c).$$

Puisque

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial c_m}(c) &= h(c_1, ..., c_{m-1}, c_m, N_1 c_m) \\ &= \frac{\partial f_0}{\partial c_m}(c) \end{aligned}$$

la différence $\dfrac{\partial f_0}{\partial c_m} - \dfrac{\partial F_1}{\partial c_m}$ est nulle au dessus de $Op(K)$ et donc $\left\|\dfrac{\partial f_1}{\partial c_m} - \dfrac{\partial F_1}{\partial c_m}\right\|_{C^0}$ est petit. Pour plus de détails, voir [5] p. 51-60. $\square$

Il n'y a aucune difficulté à passer d'un h-principe à un h-principe paramétrique.

Théorème (Gromov). – *Soit $\mathcal{R} \subset J^1(M,N)$ ouverte et ample, alors $\mathcal{R}$ satisfait au h-principe C^0-dense.*

Cela signifie que si P est une variété compacte vue comme un espace de paramètres et $\sigma : P \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R})$, alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe une homotopie $\sigma_u : [0,1] \times P \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R})$ telle que $\sigma_0 = \sigma$ et

$$\begin{array}{rccl} \sigma_1 : & P & \longrightarrow & J(\mathcal{S}ol(\mathcal{R})) \subset \Gamma(\mathcal{R}) \\ & p & \longmapsto & j^1 f_p. \end{array}$$

De plus : $\max_{p\in P} \|g_p - f_p\|_{C^0} < \epsilon$, où $g_p = bs(\sigma) : P \longrightarrow C^\infty(M,N)$.

4 h-principe pour des relations fermées

Je ne traite ici que le cas que je connais bien : celui du théorème de Nash sur les immersions C^1-isométriques. Néanmoins, l'approche *intégration convexe* de ce théorème se prête facilement à la généralisation, les deux points clés sont les suivants : il faut posséder une sous-solution de la relation différentielle (ici une immersion strictement courte) ainsi qu'un contrôle de la norme C^1 des applications construites par l'intégration convexe. Voyons cela un peu plus dans le détail.

Théorème (Nash 54, Kuiper 55).– *Soit $f_0 : (M^m, g) \longrightarrow \mathbb{E}^q$ $(q > n)$ une immersion strictement courte (i. e. $\Delta := g - f_0^*\langle\cdot,\cdot\rangle_{E^q}$ est une métrique) alors il existe une immersion C^1-isométrique $f : (M^m, g) \longrightarrow \mathbb{E}^q$ qui est C^0-proche de f_0.*

Lignes directrices de la démonstration.– On suppose M^m compacte pour simplifier l'exposition. Notons $\mathcal{R}$ la relation différentielle des isométries et $(\delta_k)_k$ une suite strictement croissante de nombres strictement positifs, convergeant vers 1 et posons :

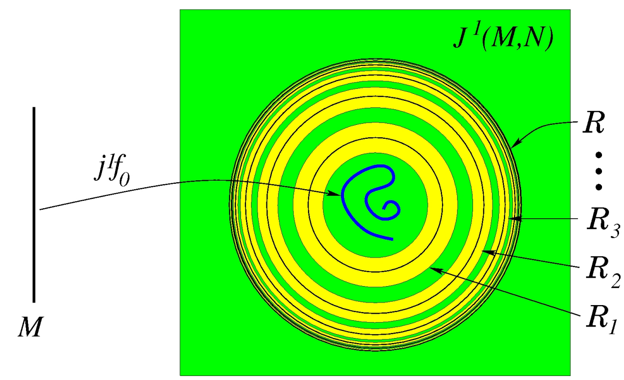
$$g_k := f_0^*\langle\cdot,\cdot\rangle_{E^q} + \delta_k \Delta.$$

Bien sûr $(g_k)_k \uparrow g$. On définit ensuite une suite de relations différentielles ouvertes $(\mathcal{R}_k)_k$ par les inéquations

$$g_k - \epsilon_k \Delta < f_0^*\langle\cdot,\cdot\rangle_{E^q} < g_k + \epsilon_k \Delta$$

avec $\epsilon_k = \frac{\delta_{k+1}-\delta_k}{3}$. Observons que la suite $(\mathcal{R}_k)_k$ converge vers $\mathcal{R}$ (pour la distance de Hausdorff) et que les $\mathcal{R}_k$ sont tous disjoints deux à deux.

Quitte à modifier la suite $(\delta_k)_k$, on peut toujours supposer que f_0 est strictement courte pour g_1. La relation $\mathcal{R}_1$ (comme tous les $\mathcal{R}_k$ d'ailleurs) n'est pas ample mais le caractère strictement court de f_0 permet de se passer de cette hypothèse : en effet cette condition assure que le 1-jet de f_0 est dans l'enveloppe convexe de la trace de $\mathcal{R}_1$ dans un certain sous-fibré.



La machinerie du h-principe pour les relations amples s'applique et on obtient, après un certain nombre d'intégrations convexes, une nouvelle immersion f_1 telle que :

1) f_1 est une solution de $\mathcal{R}_1$ i.e. $f_1^*\langle\cdot,\cdot\rangle_{E^q} \approx g_1$

2) $\|f_1 - f_0\|_{C^0} = O(\frac{1}{N_1})$

où N_1 est un nombre d'oscillations associé à f_1. En choisissant judicieusement[1] les chemins h qui construisent l'intégration convexe, on arrive à contrôler la norme C^1 : il existe une constante C universelle (i.e. indépendante du nombre d'oscillations, de f_0, du choix des δ_k) telle que :

3) $\|f_1 - f_0\|_{C^1} \leq C\sqrt{\delta_1}$.

Du 1) on déduit que f_1 est strictement courte pour g_2. On applique une nouvelle fois la machinerie de l'intégration convexe pour construire f_2 telle

[1]C'est-à-dire en fait naturellement et sans fioriture...

que :

1) f_2 est une solution de $\mathcal{R}_2$ i.e. $f_2^*\langle\cdot,\cdot\rangle_{E^q} \approx g_2$

2) $\|f_2 - f_1\|_{C^0} = O(\frac{1}{N_2})$

3) $\|f_2 - f_1\|_{C^1} \leq C\sqrt{\delta_2 - \delta_1}$.

On construit ainsi une suite d'applications $(f_k)_k$ qui converge C^0 si les $(N_k)_k$ croissent suffisamment vite, et qui converge C^1 si

$$\sum_k \sqrt{\delta_{k+1} - \delta_k} < +\infty.$$

Augmenter les $(N_k)_k$ ne coûtant rien, et le choix de la suite $(\delta_k)_k$ étant libre dans la démonstration, on peut toujours supposer que la suite $(f_k)_k$ converge C^1 vers une certaine application f qui sera nécessairement une solution de $\mathcal{R}$ et donc une immersion isométrique C^1.

Pour plus de détails, on peut lire ou consulter [4], [3], [1] p. 189-197, [2] p. 201-207, [5] p. 194-199. □

References

[1] Y. Eliahsberg et N. Mishachev, *Introduction to the h-principle*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 48, A. M. S., Providence, 2002.

[2] M. Gromov, *Partial Differential Relations*, Springer-Verlag, 1986.

[3] N. Kuiper, *On C^1-isometric imbeddings I, II*, Indag. Math. 17 (1955), 545-556, 683-689.

[4] F. Nash, *C^1-isometric imbeddings*, Ann. Math. 63 (1954), 384-396.

[5] D. Spring, *Convex Integration Theory*, Monographs in Mathematics, Vol. 92, Birkhäuser Verlag, 1998.