

Etude de l'article *More on Paperfolding* de
Dmitry FUCHS et Serge TABACHNIKOV

par Quentin LEONE

sous la direction de Vincent BORRELLI

Maître de Conférences à l'Université Claude Bernard Lyon 1

7 juillet 2010

Introduction

Nous proposons dans ce mémoire une étude de l'article *More on Paperfolding* [1] de Dmitry FUCHS et Serge TABACHNIKOV portant sur le pliage du papier le long d'une courbe. Les auteurs partent de l'observation empirique que l'on peut plier une feuille de papier le long d'une courbe mais que ce pliage ne peut pas être complet, autrement dit on ne peut pas faire correspondre en vis-à-vis les deux parties de la feuille. Ils formulent alors cinq assertions :

1. Il est possible de plier une feuille de papier le long du support d'une courbe régulière arbitraire. Ce faisant, une surface se développe dans l'espace et la ligne de pliure devient une courbe gauche dans l'espace. La courbure de cette courbe gauche est alors nécessairement plus grande que la courbe de départ ;
2. Si la courbe d'arrivée est légèrement plus courbée que la courbe de départ, alors le voisinage tubulaire du support de cette courbe doit être très fin, du moins du côté convexe ;
3. Si la courbe de départ comporte un point d'inflexion, alors la courbe d'arrivée aussi ;
4. Si la courbe de départ est une courbe fermée simple strictement convexe, alors la courbe d'arrivée ne peut pas être une courbe plane ;
5. Si la courbe de départ n'est pas fermée, alors le papier plié se met dans une position telle que la courbe d'arrivée soit une courbe plane et l'angle entre les deux nappes soit constant.

L'objet de leur article est de démontrer ces assertions sous certaines hypothèses sur le comportement physique d'une feuille de papier.

Dans ce projet personnel, on présente les arguments principaux développés par D. FUCHS et S. TABACHNIKOV, on propose ensuite pour chaque propriété une visualisation au travers d'un modèle en papier.

Ce document comporte une annexe rappelant les différentes notions nécessaires à la compréhension de l'article.

Table des matières

Introduction	2
1 Les principaux arguments de D. FUCHS et S. TABACHNI-KOV	4
1.1 Existence des isométries de l'espace	4
1.2 Etude de γ lorsque f ne change pas la courbure	8
1.3 Cas où Γ comporte un point d'inflexion	8
1.4 Cas où Γ est fermée et strictement convexe	9
2 Applications de ces résultats au papier	10
2.1 Création de la surface	10
2.2 Surfaces développables et génératrices	10
2.3 Isométrie sans modifications de la courbure	11
2.4 Courbe avec point d'inflexion	12
2.5 Courbes fermées	12
Annexe	14
Bibliographie	26

1 Les principaux arguments de D. FUCHS et S. TABACHNIKOV

Nous travaillons dans l'espace euclidien \mathbb{E}^2 ou \mathbb{E}^3 munis de leur produit scalaire canonique respectifs noté \langle, \rangle et munis de leur norme euclidienne associée notée $\|\cdot\|$. Soient

$$\Gamma : [0, l] \rightarrow \mathbb{E}^2$$

une courbe plane injective de classe \mathcal{C}^∞ paramétrée par sa longueur d'arc et \mathcal{U} un voisinage tubulaire du support de Γ . Soit

$$\gamma : [0, l] \rightarrow \mathbb{E}^3$$

une courbe gauche de classe \mathcal{C}^∞ également paramétrée par son abscisse curviligne. Soit f une isométrie du support de Γ vers le support de γ . Nous noterons k_Γ et k_γ respectivement la courbure algébrique de Γ et la courbure de γ . La plupart des observations faites par D. FUCHS et S. TABACHNIKOV se déduisent du théorème suivant :

Théorème 1.0.1 *Si $|k_\Gamma(s)| < k_\gamma(s)$ pour tout s dans $[0, l]$, alors il existe exactement deux prolongements isométriques de f en \mathcal{U} .*

1.1 Existence des isométries de l'espace

Théorème 1.1.1 *Si $0 < |k_\Gamma(s)| < k_\gamma(s)$ pour tout s dans $[0, l]$, alors il existe deux prolongements isométriques de f*

$$\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{E}^3$$

Démonstration : Soit \mathcal{S} le support de \tilde{f}_1 . Le support de γ appartient à \mathcal{S} . Soit

$$\alpha : [0, l] \rightarrow [0, 2\pi[$$

l'application qui à un point $s \in [0, l]$ associe l'angle entre le plan tangent de \tilde{f}_1 et le plan osculateur de γ en $\gamma(s)$. Ce plan existe car la courbure de γ ne s'annule pas et donc cette dernière est birégulière en ce point. Nous considérerons Γ comme une courbe plane de \mathbb{E}^3 , *id* nous la plongeons dans cet espace.

Calculons la courbure géodésique de γ au point $\gamma(s)$. Soit $(\gamma''(s))_p$ la projection orthogonale de $\gamma''(s)$ sur le plan tangent de la surface et $N(s)$ le vecteur normal de la surface au point $\gamma(s)$. Soit $\alpha(s)$ est plus petit que $\pi/2$, soit il est plus grand que $\pi/2$. Dans tous les cas, il est positif et plus petit

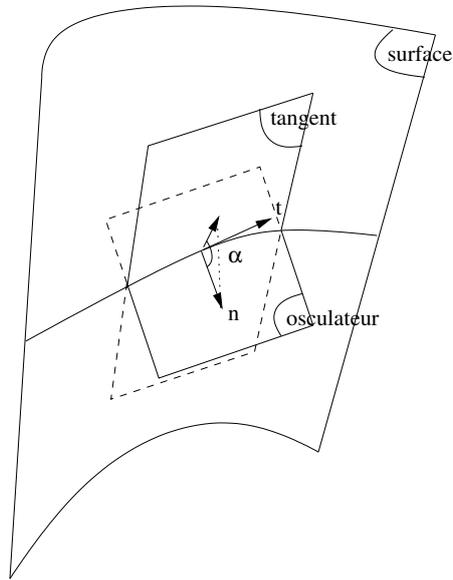


FIGURE 1 – Définition de α

que π . Supposons qu'il soit plus petit que $\pi/2$. D'après la définition de la courbure géodésique .0.24, en notant k_g la courbure géodésique, on a

$$k_g(\gamma(s)) = k_\gamma(s) \cos \alpha(s)$$

car la famille $(\gamma'(s), (\gamma''(s))_p, N(s))$ est une famille directe. On remarque qu'en faisant la substitution $\alpha \mapsto \pi - \alpha$, on obtient

$$k_g(\gamma(s)) = -k_\gamma(s) \cos(\pi - \alpha(s))$$

car la famille $(\gamma'(s), (\gamma''(s))_p, N(s))$ est cette fois indirecte. On alors dans les deux cas la même courbure géodésique.

En faisant de même si α est plus grand que $\pi/2$, on obtient la même courbure géodésique au signe près. D'après le théorème .0.3, la courbure géodésique est invariante par isométrie, d'où :

$$k_\gamma(s) \cdot \cos \alpha(s) = k_g(\Gamma(s)) = -k_\gamma(s) \cdot \cos(\pi - \alpha(s))$$

or

$$k_g(\Gamma)(s) = k_\Gamma$$

car la courbure géodésique d'une courbe plane plongé dans \mathbb{E}^3 est la même, au signe près, que la courbure algébrique de cette courbe en tant que courbe de \mathbb{E}^2 . Le signe dépendant de l'orientation du plan contenant cette courbe,

on peut faire en sorte que ces deux courbures aient même signe. Donc pour que \tilde{f}_1 soit un prolongement isométrique, il faut que le support de la surface $\tilde{f}_1(\mathcal{U})$ ait des plans tangents faisant soit un angle α , soit un angle $\pi - \alpha$ avec les plans osculateurs de γ . Les prolongements isométriques \tilde{f}_1 et \tilde{f}_2 sont donc définies par l'application qui transforme \mathcal{U} en l'enveloppe de la famille de plans constituée des plans tangents qui font respectivement un angle α et $\pi - \alpha$ avec les plans osculateurs de γ . \square

On note à présent \mathcal{S} le support de la surface paramétrée par l'un des deux prolongements de f . Pour obtenir une telle surface, nous prenons la surface définie par l'enveloppe de la famille de plans qui font un angle α avec les plans osculateurs de γ . Le cosinus de cet angle est égal au rapport entre la courbure de Γ et celle de γ et donc est soit compris entre 0 et $\pi/2$ si la courbure de Γ est positive, soit compris entre $\pi/2$ et π si elle est négative. Nous prenons comme repère pour l'angle α le repère de Frénet. Nous obtenons la seconde surface en faisant la substitution $\alpha \mapsto \pi - \alpha$.

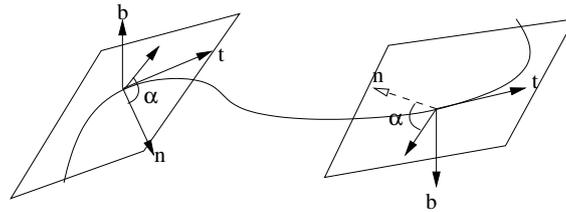


FIGURE 2 – Création de la surface

Corollaire 1.1.1 *Les surfaces \tilde{f}_1 et \tilde{f}_2 sont des surfaces développables.*

Démonstration : On utilise la proposition .0.12. \square

Proposition 1.1.1 *Soit $\beta(s)$ l'angle entre la génératrice de \mathcal{S} et la courbe γ au point $\gamma(s)$. On a alors*

$$\cot \beta(s) = \frac{\alpha'(s) - \tau(s)}{k_\gamma(s) \cos \alpha(s)}$$

où τ est la torsion de γ .

Démonstration : Soit un plan $\mathcal{P}(s)$ faisant un angle $\alpha(s)$ avec le plan osculateur au point $\gamma(s)$. Ce plan est tangent à la courbe et donc le vecteur

tangent $\overrightarrow{t(s)}$ appartient à ce plan. On note $\overrightarrow{v(s)}$ le vecteur directeur de la droite d'intersection de $\mathcal{P}(s)$ et du plan normal. On a donc un angle $\alpha(s)$ entre $\overrightarrow{v(s)}$ et $\overrightarrow{n(s)}$. De plus, $\mathcal{P}(s)$ est engendré par $\overrightarrow{t(s)}$ et $\overrightarrow{v(s)}$. On note $\overrightarrow{N(s)}$ un vecteur normal au plan $\mathcal{P}(s)$. On a donc :

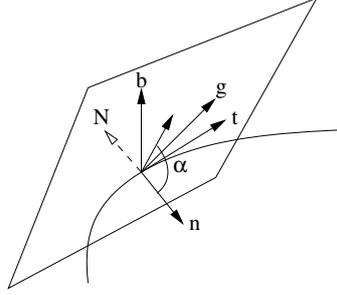


FIGURE 3 – Ensemble des vecteurs de la démonstration

$$\overrightarrow{v(s)} = \cos \alpha(s) \cdot \overrightarrow{n(s)} + \sin \alpha(s) \cdot \overrightarrow{b(s)}$$

et

$$\overrightarrow{N(s)} = -\sin \alpha(s) \cdot \overrightarrow{n(s)} + \cos \alpha(s) \cdot \overrightarrow{b(s)}$$

Après avoir fixé les notations, on va calculer $\overrightarrow{g(s)}$, le vecteur directeur de la génératrice de la surface défini par l'enveloppe. D'après la proposition.0.12, on a :

$$\overrightarrow{g(s)} = \overrightarrow{N(s)} \wedge \overrightarrow{N'(s)}$$

Comme

$$\overrightarrow{N'(s)} = -\alpha'(s) \cos \alpha(s) \cdot \overrightarrow{n(s)} - \sin \alpha(s) \cdot \overrightarrow{n'(s)} - \alpha'(s) \sin \alpha(s) \cdot \overrightarrow{b(s)} + \cos \alpha(s) \cdot \overrightarrow{b'(s)}$$

En utilisant les propriétés du produit vectoriel ainsi que les formules de Frénet, on obtient au point s :

$$\overrightarrow{g} = \sin^2 \alpha (k \cdot \overrightarrow{b} - \tau \cdot \overrightarrow{t}) + \alpha' \cdot \overrightarrow{t} + k \cos \alpha \sin \alpha \cdot \overrightarrow{n} - \tau \cos^2 \alpha \cdot \overrightarrow{t}$$

D'où

$$\overrightarrow{g(s)} = k(s) \sin \alpha(s) \cdot \overrightarrow{v(s)} + (\alpha'(s) - \tau(s)) \cdot \overrightarrow{t(s)}$$

Or l'angle $\beta(s)$ correspond à l'angle entre $\overrightarrow{g(s)}$ et $\overrightarrow{t(s)}$. Par suite :

$$\cot \beta(s) = \frac{\langle \overrightarrow{g(s)}, \overrightarrow{t(s)} \rangle}{\det(\overrightarrow{g(s)}, \overrightarrow{t(s)})}$$

d'où :

$$\cot \beta(s) = \frac{k(s) \sin \alpha(s) \langle \overrightarrow{v(s)}, \overrightarrow{t(s)} \rangle + (\alpha'(s) - \tau(s)) \langle \overrightarrow{t(s)}, \overrightarrow{t(s)} \rangle}{k(s) \sin \alpha(s) \det(\overrightarrow{v(s)}, \overrightarrow{t(s)}) + (\alpha'(s) - \tau(s)) \det(\overrightarrow{t(s)}, \overrightarrow{t(s)})}$$

On obtient finalement :

$$\cot \beta(s) = \frac{\alpha'(s) - \tau(s)}{k(s) \sin \alpha(s)}$$

□

1.2 Etude de γ lorsque f ne change pas la courbure

Proposition 1.2.1 *Si la courbure en tout point de γ est la même que celle de Γ , alors γ est la ligne de striction de la surface \mathcal{S} .*

Démonstration : Si la courbure de γ et celle de Γ sont identiques, alors $\alpha(s) = 0$ pour tout s de $[0, l]$. Il n'y a donc qu'une extension possible \tilde{f} où le support de \tilde{f} est défini par l'enveloppe des plans osculateurs de γ . D'après la proposition .0.12, les génératrices sont engendrées par les vecteurs

$$b(s) \wedge b'(s) = -\tau(s)t(s)$$

où b est le vecteur binormal de γ et τ sa torsion. Donc les génératrices sont les tangentes de γ et cette dernière est donc la ligne de striction de \tilde{f} . □

1.3 Cas où Γ comporte un point d'inflexion

Proposition 1.3.1 *Si Γ possède en s_0 un point d'inflexion mais pas γ , alors les deux surfaces définies par les prolongements de f se croisent le long d'une droite en s_0 .*

Démonstration : Soit $\epsilon > 0$. Si Γ possède un point d'inflexion en s_0 , alors

$$k_\gamma(s_0) \cos \alpha(s_0) = 0.$$

On a donc deux cas : $k_\gamma(s_0) = 0$ ou $\alpha(s_0) = \pi/2$. Comme γ n'a pas de point d'inflexion, nous sommes dans le second cas. Etudions la surface paramétrée par l'un des prolongements de f , c'est-à-dire une enveloppe de plans tangents de γ faisant un angle α avec le plan osculateur de γ . On sait que $\alpha(s_0 - \epsilon) \in]0, \pi/2[$ ou $\alpha(s_0 - \epsilon) \in]\pi/2, \pi[$. Supposons que l'on soit dans le premier cas, le second cas se traite de façon analogue. Donc les courbures

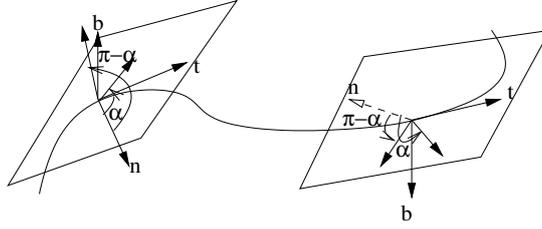


FIGURE 4 – Croisement des surfaces

algébriques $k_\gamma(s_0 - \epsilon)$ et $k_\Gamma(s_0 - \epsilon)$ sont de même signe et l'enveloppe de plans fait un angle plus petit que $\pi/2$. Comme la courbure algébrique de Γ change de signe en s_0 , on a $\alpha(s_0 + \epsilon) \in]\pi/2, \pi[$. En faisant de même avec la seconde surface en appliquant la substitution $\alpha \mapsto \pi - \alpha$, on constate que les deux surfaces se croisent donc le long d'une droite en $\gamma(s_0)$. \square

1.4 Cas où Γ est fermée et strictement convexe

Lemme 1.4.1 *Si Γ est une courbe simple fermée strictement convexe et si la courbure de γ n'est pas identique à celle de Γ , alors γ n'est pas une courbe plane.*

Démonstration : Supposons que γ soit une courbe plane. On a pour tout $t \in I$, $k_\gamma \geq k_\Gamma$. Comme la courbure de γ n'est pas identique à celle de Γ , on a $\int k_\gamma > \int k_\Gamma$. Or l'intégrale de la courbure d'une courbe plane est un multiple de 2π et donc ces intégrales devraient être égales ce qui est absurde et donc γ n'est pas une courbe plane. \square

Proposition 1.4.1 *Si Γ est une courbe simple fermée strictement convexe et γ est différente de Γ , alors γ n'est pas une courbe plane.*

Démonstration : Si γ est différente de Γ , il y a trois cas : soit elle diffère par sa torsion et sa courbure, soit juste par sa torsion, soit juste par sa courbure. Si elle diffère par sa torsion, comme Γ a une torsion nulle, il existe un point où γ a une torsion non nulle en ce point. Il existe donc un voisinage de cette courbe qui est non plane. Si elle ne diffère que par sa courbure, alors d'après le lemme précédent, elle est non plane. Donc dans tous les cas, γ est non plane. \square

2 Applications de ces résultats au papier

Dans cette partie, nous illustrons les résultats obtenus précédemment en réalisant des pliages de papier. Cette partie n'a qu'un caractère *illustratif* et une compréhension complète de ces pliages nécessiterait une étude des phénomènes physiques à l'oeuvre, ce qui est ici hors de propos.

2.1 Création de la surface

Prenons une feuille de papier pas trop grande. Dessinons-y le support d'une courbe de classe \mathcal{C}^∞ régulière pour pouvoir appliquer les résultats précédents. Appelons cette courbe Γ . Dans un premier temps, Γ est strictement convexe. Ainsi, nous pouvons modifier Γ en γ en y opérant une isométrie. Lorsque que l'on modifie une feuille de papier sans la froisser ni la déchirer, on y applique une isométrie. En appliquant l'isométrie qui transforme Γ en γ , nous modifions toute la feuille. Ainsi, nous voyons apparaître une nouvelle surface. Mais le théorème 1.0.1 nous indique qu'il existe deux isométries donnant deux surfaces. Ainsi, en tordant la feuille dans l'autre sens, nous appliquons la seconde isométrie ce qui nous donnera la seconde surface. En les faisant s'intersecter le long de γ , nous voyons dans l'espace les résultats des deux isométries. Comme notre théorie est locale, nous ne devons prendre qu'un voisinage de Γ sur la feuille. Ces deux surfaces jointes le long de γ forment une figure E.

Voici à présent un autre moyen d'obtenir cette figure. Il suffit simplement de plier le long de Γ la feuille et de modifier la pliure jusqu'à obtenir γ . En faisant ainsi, on obtient qu'une partie de E. En effet, en pliant le long de Γ de cette manière, nous appliquons simultanément les deux isométries, l'une du côté convexe de Γ , l'autre de son côté concave. Plus précisément, au lieu de laisser le côté concave dans le prolongement du côté convexe, on le remonte ce qui crée la seconde surface. En pliant dans l'autre sens, on obtient la seconde partie de E. On obtient ainsi sans trop de difficulté une partie des deux résultats de l'isométrie, l'autre partie étant obtenue en pliant dans l'autre sens. On peut aussi visualiser la courbe γ résultant des isométries à l'intersection des deux surfaces qui, dans notre cas, est la pliure. On constate sans trop de difficulté que la courbure de γ est plus grande que celle de Γ . C'est en effet une condition suffisante du théorème pour l'existence des surfaces.

2.2 Surfaces développables et génératrices

Le corollaire 1.1.1 du théorème 1.1.1 nous informe que les surfaces créées sont développables. Or les surfaces développables ont une courbure de Gauss

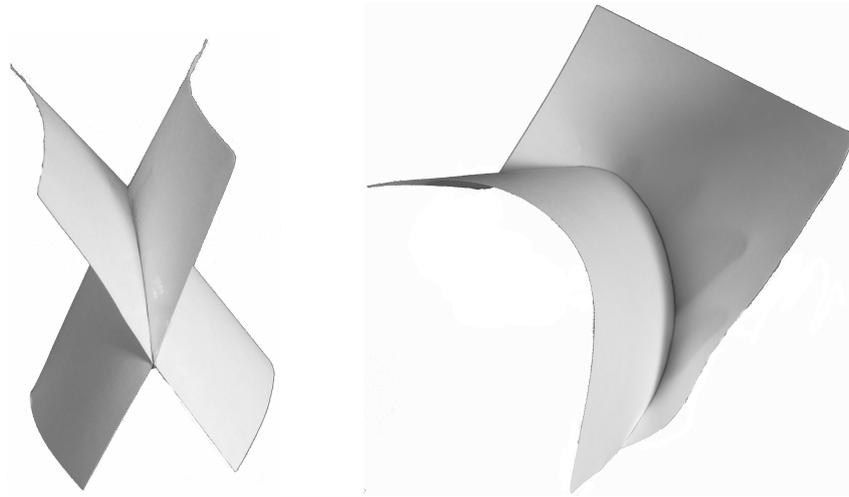


FIGURE 5 – Illustration du résultats des isométries

identiquement nulle. Nous pouvons ainsi, et c'est ce qui rend ces résultats si intéressant, visualiser des surfaces qui ne sont pas trivialement plates.

Comme ces surfaces sont développables, elles admettent des génératrices. La proposition 1.1.1 nous donne l'angle qu'elles font avec les tangentes. Ainsi, si on paramètre Γ et γ , on obtient l'angle et on peut visualiser ces génératrices.

2.3 Isométrie sans modifications de la courbure

Dans cette section, nous montrons comment visualiser le résultat de la proposition 1.2.1.

Nous reprenons donc notre feuille comme dans la première partie. Nous y traçons une courbe toujours strictement convexe de classe \mathcal{C}^∞ . Plions la feuille le long de la courbe afin d'obtenir une partie des deux surfaces et la courbe γ . Essayons de modifier les surfaces afin de modifier la courbure de γ . Si on comprime aux extrémités de γ , on se rend compte que les deux nappes se rapprochent. Ce phénomène est du à la relation entre la courbure de Γ , celle de γ et de l'angle entre les plans de l'enveloppe et les plans osculateurs. Plus la courbure de γ augmente, ce que l'on fait en comprimant les surfaces, plus cet angle augmente.

Faisons à présent l'opération inverse et éloignons les extrémités de γ . Nous voyons ainsi les deux nappes se rapprocher des plans osculateurs. Ceci est normal car l'angle diminue quand la courbure de γ diminue. Si nous faisons l'opération jusqu'à la fin, les deux nappes redeviennent la feuille de départ.

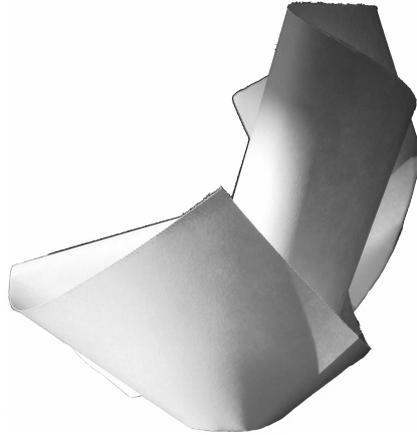


FIGURE 6 – Surface plate

Pour éviter ce désagrément, il ne faut pas modifier la torsion de γ lors de l'étirement. La proposition 1.2.1 nous dit que si l'on finit l'étirement, γ devient la ligne de striction des surfaces. Cependant, les génératrices étant alors les tangentes de γ , elles ne définissent qu'une nappe qui était initialement le côté concave de Γ . L'autre nappe n'étant pas définie, on doit donc l'enlever avant le pliage.

2.4 Courbe avec point d'inflexion

Dans cette partie, nous supposons que Γ comporte un point d'inflexion. D'après la partie 1.3, il y a donc deux possibilités : soit les surfaces se croisent, soit γ comporte aussi un point d'inflexion. Lorsque nous plions le long de Γ la feuille, nous suivons cette courbe et donc nous reproduisons le point d'inflexion.

Essayons à présent de supprimer ce point d'inflexion en modifiant γ . La première proposition de la partie 1.3 nous dit que si γ ne possède pas de points d'inflexions, alors les surfaces se croisent le long d'une droite se qui est impossible avec le papier.

2.5 Courbes fermées

Intéressons-nous à présent aux courbe Γ fermée strictement convexe, c'est-à-dire une courbe sans points d'inflexions. La partie 1.4 nous dit que la courbe γ ne sera jamais une courbe plane.

Dans notre cas, pour créer la courbe γ , il faut ôter un peu de l'intérieur

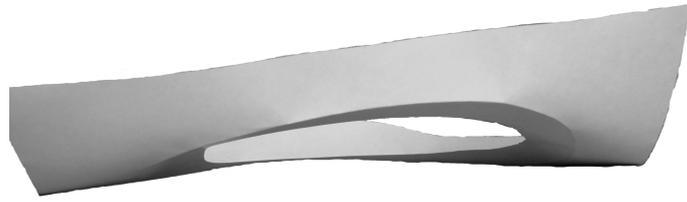


FIGURE 7 – Illustration d'une courbe fermée

de Γ .

Annexe : Un peu de théorie des courbes et surfaces

Théorie des courbes

Définition et paramétrisation des courbes planes

Dans cette sous-partie, nous travaillons dans l'espace euclidien \mathbb{E}^2 muni du produit scalaire canonique noté \langle, \rangle et de la norme euclidienne $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Définition .0.1 Une courbe paramétrée différentiable est une application \mathcal{C}^∞

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^2$$

où $I = [a, b]$ est un intervalle de \mathbb{R} . On appelle support de α l'ensemble $\alpha(I) \subset \mathbb{E}^2$.

Définition .0.2 On dit que α est régulière si pour tout t dans I , $\alpha'(t)$ est non nul.

Définition .0.3 Soit $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ une courbe paramétrée. Soit $\beta : J \rightarrow \mathbb{E}^2$ une application. S'il existe un \mathcal{C}^k -difféomorphisme Φ de I dans J tel que :

$$\alpha = \beta \circ \Phi$$

alors β est une \mathcal{C}^k -reparamétrisation de α .

On a alors

$$\beta = \alpha \circ \Phi^{-1}.$$

Comme α et Φ^{-1} sont continues, β est aussi continue. On a, de plus,

$$\beta(J) = \alpha(\Phi^{-1}(J)) = \alpha(I).$$

Donc β a le même support que α et ainsi β est bien une paramétrisation de la même courbe que celle de α .

Proposition .0.1 Si β est régulière en $\Phi(t)$, alors α est régulière.

Démonstration : On a

$$\alpha'(t) = \Phi'(t) \cdot \beta'(\Phi(t))$$

Or comme Φ est un difféomorphisme, Φ est bijective et donc Φ' ne s'annule pas. On a, par la régularité de $\beta(\Phi)$, α régulière. \square

Nous considérons dans la suite $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ une courbe de classe \mathcal{C}^∞ régulière où $I = [a, b]$.

Paramétrisation d'une courbe par son abscisse curviligne

Définition .0.4 On appelle longueur d'arc de α le nombre

$$l = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Définition .0.5 La courbe α est dite paramétrée par son abscisse curviligne ou sa longueur d'arc lorsque $\|\alpha'(s)\| = 1$ pour tout s dans $[0, l]$.

Proposition .0.2 Toute courbe de classe \mathcal{C}^1 et régulière admet une paramétrisation par son abscisse curviligne.

Observation : Deux courbes de même longueur sont isométriques.

Définition .0.6 Un point $\alpha(t)$ est dit birégulier si $(\alpha'(t), \alpha''(t))$ est une famille libre. Une courbe est dite birégulière si tous ses points sont biréguliers.

Définition .0.7 Un point d'une courbe paramétrée par sa longueur d'arc qui n'est pas birégulier est un point d'inflexion.

Nous considérons à présent une courbe γ paramétrée par sa longueur d'arc.

Courbure d'une courbe plane

Définition .0.8 On appelle courbure principale de γ en s , noté k la norme de la dérivée seconde de γ en s .

On considère dans la suite que la courbe est de courbure non nulle en s .

Définition .0.9 On appelle cercle osculateur de γ en s le cercle tangent à la courbe dont le rayon est l'inverse de la courbure de γ en s .

Définition .0.10 La normale principale de γ en s :

$$n(s) = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}$$

Définition .0.11 La normale algébrique n_{alg} est l'unique normale de γ telle que pour tout $s \in I$, $(\gamma'(s), n_{alg}(s))$ est une base orthonormée directe.

On peut ensuite mettre un signe à la courbure d'une courbe :

Définition .0.12 On définit la courbure algébrique par :

$$k_{alg}(s) = \begin{cases} k(s) & \text{si } n_{alg}(s) = n(s) \\ -k(s) & \text{si } n_{alg}(s) = -n(s) \end{cases}$$

Théorème .0.1 La courbure algébrique caractérise les courbes planes paramétrée par leur abscisse curviligne à un déplacement près.

Courbes gauches

On travail à présent dans l'espace euclidien \mathbb{E}^3 muni du produit scalaire canonique \langle, \rangle et de la norme euclidienne associée. On considère à présent une courbe régulière $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ paramétrée par son abscisse curviligne de classe \mathcal{C}^∞ . Dans la suite, nous noterons $t(s) = \gamma'(s)$ le vecteur tangent unitaire au point $\gamma(s)$ et

$$n(s) = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}$$

le vecteur normal au point $\gamma(s)$ si ce n'est pas un point d'inflexion. La courbure de la courbe γ sera noté k .

Définition .0.13 Le vecteur $b(s) = t(s) \wedge n(s)$ est le vecteur binormal de la courbe au point $\gamma(s)$.

Définition .0.14 Le trièdre orthonormé direct $(\gamma(s), t(s), n(s), b(s))$ est appelé le trièdre de Frénet.

Comme γ est de classe \mathcal{C}^∞ , $n(s)$ est dérivable et on a :

$$b'(s) = t(s) \wedge n'(s)$$

D'où $b'(s)$ est perpendiculaire à $t(s)$ donc parallèle à $n(s)$. Par suite, on a :

Définition .0.15 Le nombre $\tau(s)$ dans $b'(s) = \tau(s)n(s)$ est appelé la torsion de γ au point $\gamma(s)$.

Définition .0.16 On appelle formules de Frénet les formules :

$$\begin{aligned}t' &= kn \\n' &= -kt - \tau b \\b' &= \tau n\end{aligned}$$

Définition .0.17 Le plan engendré par les vecteurs t et b est appelé plan rectifiant, celui engendré par t et n est le plan osculateur et celui engendré par n et b est le plan normal.

Proposition .0.3 Une courbe γ de classe \mathcal{C}^3 paramétrée par son abscisse curviligne s admet en tout point birégulier un repère de Frénet.

Démonstration : Un point d'une courbe de classe \mathcal{C}^∞ paramétrée par sa longueur d'arc est soit birégulier, soit un point d'inflexion. Si ce n'est pas un point d'inflexion, alors les vecteurs t, n, b existent et forment une famille orthogonale. Donc le repère de Frénet existe. \square

Théorème .0.2 Soient

$$k : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

et

$$\tau : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$$

deux fonctions continues \mathcal{C}^∞ . Il existe une courbe γ de longueur l paramétrée par l'abscisse curviligne s telle que $\forall s \in [0, l], k_\gamma(s) = k(s)$ et $\tau_\gamma(s) = \tau(s)$. Cette courbe est unique au déplacement près.

Ce théorème est le théorème fondamental de la théorie locale des courbes (voir [2] page 19). Ce théorème est le théorème fondamental de la théorie locale des courbes (voir [2] page 19).

Surfaces

Définition des surfaces et paramétrisation

Définition .0.18 Une surface paramétrée est une application de classe \mathcal{C}^∞

$$f : U \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3.$$

L'ensemble $\mathcal{S} = f(U)$ est le support de la surface.

Définition .0.19 Une surface paramétrée $f : U \rightarrow \mathbb{E}^3$ est régulière en un point $u \in U$ si et seulement si $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(u), \frac{\partial f}{\partial x_2}(u))$ est une famille libre.

Exemple : Soit

$$g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

une fonction différentiable. Alors

$$\begin{aligned} f : U &\rightarrow \mathbb{E}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x, y, g(x, y)) \end{aligned}$$

est une surface régulière dont le support est le graphe de g .

Définition .0.20 Soient $f : U \rightarrow \mathbb{E}^3$ et $g : V \rightarrow \mathbb{E}^3$, deux surfaces régulières. S'il existe un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme Φ de U dans V tel que

$$f = g \circ \Phi,$$

alors g est une reparamétrisation de \mathcal{S} .

Plan tangent et normale à la surface

Définition .0.21 Soit $f : U \rightarrow \mathbb{E}^3$ une surface paramétrée régulière en un point p . Le plan tangent $\mathcal{T}_p\mathcal{S}$ est le plan affine passant par p et dont l'espace vectoriel associé est engendré par les deux dérivées partielles de f en p .

Proposition .0.4 Le plan tangent $\mathcal{T}_p\mathcal{S}$ de f ne dépend pas d'un reparamétrage de f .

Démonstration : Soient

$$\begin{aligned} f : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{E}^3 \\ (u, v) &\mapsto (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : V \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{E}^3 \\ (u', v') &\mapsto (g_1(u', v'), g_2(u', v'), g_3(u', v')) \end{aligned}$$

deux représentations paramétriques de \mathcal{S} . Il existe donc un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme

$$\begin{aligned} \Phi : U &\rightarrow V \\ (u, v) &\mapsto (u', v') \end{aligned}$$

tel que :

$$f = g \circ \Phi.$$

On a donc

$$g = f \circ \Phi^{-1}$$

En dérivant suivant la règle de chaîne, on obtient en un point $p \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial g}{\partial u'}(p) = \frac{\partial f}{\partial u}(\Phi^{-1}(p)) \frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial u'}(p) + \frac{\partial f}{\partial v}(\Phi^{-1}(p)) \frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial u'}(p)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v'}(p) = \frac{\partial f}{\partial u}(\Phi^{-1}(p)) \frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial v'}(p) + \frac{\partial f}{\partial v}(\Phi^{-1}(p)) \frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial v'}(p)$$

Donc les dérivées partielles de g sont des combinaisons linéaires de celles de f et ainsi, le plan tangent engendré par les dérivées partielles de g est le même que celui engendré par celles de f . \square

On note à présent les dérivées partielles f_u et f_v au lieu de $\frac{\partial f}{\partial u}$ et $\frac{\partial f}{\partial v}$.

Définition .0.22 On définit le vecteur normal unitaire de $f : U \rightarrow \mathbb{E}^3$ en p :

$$N(p) = \frac{f_u \wedge f_v}{|f_u \wedge f_v|}$$

où \wedge représente le produit vectoriel.

Définition .0.23 Un plan normal de $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ en p est un plan contenant la normale de la surface en p .

Courbes sur les surfaces

Proposition .0.5 Soient $f : U \rightarrow \mathbb{E}^3$ une surface régulière et

$$\alpha : I \subset \mathbb{E} \rightarrow U \subset \mathbb{E}^2$$

une courbe plane régulière différentiable. Alors la courbe

$$f \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$$

est régulière.

Démonstration : Soit, pour $t \in I$,

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)).$$

On a alors pour tout t

$$(f \circ \alpha)'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).$$

Or si ce nombre est nul, f n'est pas régulière ce qui est impossible. Donc $f \circ \alpha$ est régulière. \square

Définition .0.24 La courbure géodésique d'une courbe γ paramétrée par sa longueur d'arc en un point $\gamma(s)$ sur une surface régulière est la norme de la projection orthogonale de $\gamma''(s)$ sur le plan tangent de la surface en ce point muni du signe positif si $(\gamma'(s), (\gamma''(s))_p, N(s))$ est directe où $(\gamma''(s))_p$ est la projection orthogonale de $\gamma''(s)$ sur le plan tangent de la surface, sinon on muni cette norme du signe négatif.

Théorème .0.3 La courbure géodésique est invariante par isométrie.

Courbure d'une surface en un point

Définition .0.25 Soit $f : U \rightarrow \mathbb{E}^3$ une surface paramétrée. L'application

$$\begin{aligned} G : U \subset \mathbb{E}^2 &\rightarrow \mathbb{S}^2, \\ p &\mapsto N(p) \end{aligned}$$

où \mathbb{S}^2 est la sphère unité de \mathbb{E}^3 , est l'application de Gauss.

L'application de Gauss est différentiable et sa différentielle en p est

$$dG_p : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathcal{T}_{N(p)}\mathbb{S}^2.$$

Or on a $\langle N, N \rangle \equiv 1$ d'où en dérivant : $\langle dN, N \rangle \equiv 0$. Donc la normale en p est perpendiculaire avec la différentielle de l'application de Gauss en p . Comme cette dernière est à valeurs dans le plan tangent, $N(p)$ est normal à $\mathcal{T}_p\mathcal{S}$ et à $\mathcal{T}_{N(p)}\mathbb{S}^2$. Donc $\mathcal{T}_p\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}_{N(p)}\mathbb{S}^2$ sont parallèles. Donc la différentielle de l'application de Gauss est une application linéaire de $\mathcal{T}_p\mathcal{S}$ dans $\mathcal{T}_{N(p)}\mathbb{S}^2$.

Et voici le célèbre *Theorema egregium* de Gauss :

Théorème .0.4 La courbure de Gauss est invariante par isométrie.

Surfaces plates

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{E}^3$ une surface paramétrée de classe \mathcal{C}^∞ et régulière.

Définition .0.26 Une surface plate est une surface où le rang de la différentielle de l'application de Gauss en tout point de la surface est inférieur ou égal à 1.

Surfaces réglées

Soient

$$\alpha : I \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$$

une courbe de classe \mathcal{C}^∞ et une famille \mathcal{F} de droites passant par le point $\alpha(t)$ et définie par un vecteur directeur $w(t)$. L'équation paramétrique d'une droite de \mathcal{F} est donc :

$$v \in \mathbb{R} \mapsto \alpha(t) + vw(t).$$

Définition .0.27 *La surface paramétrée par*

$$\begin{aligned} f : I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{E}^3 \\ (t, v) &\mapsto \alpha(t) + vw(t) \end{aligned}$$

est une surface réglée de directrice α . Les droites sont les génératrices de la surface.

On suppose à présent que $\|w(t)\| = 1$ pour tout t . Supposons aussi que $w'(t) \neq 0$.

Proposition .0.6 *Il existe une unique courbe β tracée sur la surface telle que $\langle \beta'(t), w'(t) \rangle = 0$ pour tout $t \in I$ appelée ligne de striction de f . Elle est indépendante de la directrice de la surface. Le point de la génératrice appartenant à la ligne de striction est le point central de cette génératrice.*

Démonstration : Soit β une telle courbe. On a donc pour tout $t \in I$:

$$\beta(t) = \alpha(t) + u(t)w(t)$$

D'où

$$\beta' = \alpha' + u'w + uw'$$

Par suite

$$0 = \langle \beta', w' \rangle = \langle \alpha', w' \rangle + u \langle w', w' \rangle$$

Comme $w' \neq 0$, on obtient donc comme paramétrage de β :

$$\beta(t) = \alpha(t) - \frac{\langle \alpha'(t), w'(t) \rangle}{\langle w'(t), w'(t) \rangle} w(t)$$

Soient α_1 et α_2 deux directrices distinctes de (\mathcal{S}, f) . Donc pour une fonction $s = s(v)$, on a :

$$f(t, v) = \alpha_1(t) + vw(t) = \alpha_2(t) + sw(t)$$

D'où :

$$\beta_1 - \beta_2 = (\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{\langle (\alpha'_2 - \alpha'_1), w' \rangle}{\langle w', w' \rangle} w$$

Comme $\langle w, w' \rangle = 0$,

$$\beta_1 - \beta_2 = \left((s - v) + \frac{\langle (v - s)w', w' \rangle}{\langle w', w' \rangle} \right) w = 0$$

Donc la ligne de striction est bien indépendante de la directrice. \square

Définition .0.28 *On appelle paramétrage canonique de f un paramétrage de la surface réglée où la directrice est la ligne de striction.*

Proposition .0.7 *La courbure de Gauss d'une surface réglée est négative.*

Pour une démonstration de cette proposition, voir [2], pages 191-192.

Surfaces développables

On suppose une famille de droite $(\alpha(t), w(t))$. Le produit mixte sera noté par $(, ,)$.

Définition .0.29 *Une surface développable est une surface réglée où $(w(t), w'(t), \alpha'(t)) = 0$ pour tout $t \in I$.*

Si $\alpha'(t) = 0$, la directrice est réduite à un point et la surface est alors un cône. Si $w'(t) = 0$, alors w garde une direction constante et la surface est alors un cylindre.

Supposons α régulière et $w' \neq 0$. Alors $(w(t), w'(t))$ est une famille libre. $(w(t), w'(t), \alpha'(t)) = 0$ signifie que $\alpha'(t)$ appartient au sous-espace-vectoriel engendré par $(w(t), w'(t))$.

Proposition .0.8 *Les génératrices d'une surface développable sont tangentes à la ligne de striction.*

Démonstration : Comme une surface développable est une surface réglée, elle admet une ligne de striction β telle que $\langle \beta'(t), w'(t) \rangle = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme w et w' sont perpendiculaires et β' appartient au plan porté par w et w' , β' est colinéaire à w . Donc les génératrices sont tangentes à la ligne de striction. \square

Remarque : Souvent, dans le cas des surfaces développables, la ligne de striction est appelée *arête de rebroussement*. L'arête de rebroussement a exactement les mêmes propriétés que la ligne de striction.

Proposition .0.9 *Le vecteur normal d'une surface développable garde une direction constante le long de chaque génératrice. Autrement dit, le plan tangent d'une surface développable est est le même le long d'une génératrice.*

Démonstration : Le plan tangent est engendré par les dérivées partielles de la paramétrisation de la surface. Pour une surface développable paramétrée canoniquement, on a :

$$f_s(s, v) = \frac{\partial f}{\partial s}(s, v) = \beta'(s) + vw'(s) = \lambda(v)w(s) + vw'(s)$$

$$f_v(s, v) = \frac{\partial f}{\partial v}(s, v) = w(s)$$

Or la génératrice d'une surface développable est obtenue en fixant s et en faisant varier v . Donc le long d'une génératrice, les plans tangents sont engendrés par un vecteur commun. Intéressons-nous à présent au second vecteur qui engendre les plans tangents.

Si on est dans le cas d'un cône, $\beta' \equiv 0$ ce qui entraîne que le second vecteur (la première dérivée partielle) est engendré par le vecteur directeur de la génératrice. Dans le cas d'un cylindre, $w' \equiv 0$ et on ne peut pas parler dans ce cas de ligne de striction. De plus, un cylindre n'admet pas de ligne de striction et donc les dérivées partielles sont libres et identiques le long des génératrices.

Si nous n'avons ni cône, ni cylindre, alors β' appartient au plan vectoriel engendré par w et w' . Comme nous avons un paramétrage canonique, on a :

$$f_s(s, v) = \lambda(v)w(s) + vw'(s)$$

et comme w et w' sont orthogonaux, les deux dérivées partielles sont libres.

Dans tous les cas, les plans tangents sont identiques le long d'une même génératrice, même sur les points centraux. \square

Proposition .0.10 *Le vecteur normal d'une surface développable paramétrée canoniquement qui n'est pas un cylindre et où l'arête de rebroussement est paramétrée par son abscisse curviligne en un point $f(s, v)$ est*

$$N(f(s, v)) = \operatorname{sgn}(v) \frac{w'(s) \wedge w(s)}{|w'(s) \wedge w(s)|}$$

où $\operatorname{sgn}(v)$ est le signe de v .

Démonstration : On a

$$f(s, v) = \beta(s) + vw(s)$$

$$f_s = \frac{\partial f}{\partial s} = \beta'(s) + vw'(s)$$

$$f_v = \frac{\partial f}{\partial v} = w(s)$$

D'où

$$f_s \wedge f_v = \beta'(s) \wedge w(s) + vw'(s) \wedge w(s)$$

Comme les génératrices sont parallèles aux tangentes, il existe $\lambda(s) \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\beta'(s) = \lambda(s)w(s)$$

Par suite,

$$f_s \wedge f_v = \lambda(s)w(s) \wedge w(s) + vw'(s) \wedge w(s) = vw'(s) \wedge w(s)$$

Comme $N(f(s, v)) = \frac{f_s \wedge f_v}{|f_s \wedge f_v|}$ et que la surface n'est pas un cylindre, on a

$$N(f(s, v)) = \operatorname{sgn}(v) \frac{w'(s) \wedge w(s)}{|w'(s) \wedge w(s)|}$$

ce qui démontre la proposition. \square

Proposition .0.11 *Une surface développable est une surface plate.*

Démonstration : D'après la proposition .0.10, l'application de Gauss en tout point de la surface ne dépend que d'une variable au signe près. Comme l'application de Gauss est différentiable, elle admet une différentielle en tout point qui est une combinaison linéaire des dérivées partielles. Si l'on garde les mêmes notations, la dérivée de $N(f(s, v))$ suivant v est nulle. Donc la différentielle n'est portée que par la dérivée de $N(f(s, v))$ suivant s . C'est donc une droite vectorielle. Par suite, la différentielle est au plus de rang 1 ce qui entraîne par définition qu'une surface développable est plate. \square

Proposition .0.12 *Soit $(\mathcal{P}_t)_{t \in I}$ une famille de plans, de vecteur normal unitaire $N(t)$ et tel que pour tout $t \in I$, $N'(t)$ est non nul. Soit $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ une courbe régulière telle que pour tout $t \in I$, $\alpha'(t)$ est dans le plan \mathcal{P}_t . Alors l'enveloppe de plan $(\mathcal{P}_t)_{t \in I}$ définit une surface développable où les génératrices sont engendrées pour tout $t \in I$ par $N(t) \wedge N'(t)$.*

Démonstration : Soit t un réel. L'équation implicite d'un plan de la famille en un point $\alpha(t)$ est

$$\langle N(t), x \rangle - \langle N(t), \alpha(t) \rangle = 0$$

en dérivant par rapport à t , on a

$$\langle N'(t), x \rangle - \langle N'(t), \alpha(t) \rangle = 0.$$

Soit \mathcal{G}_t l'ensemble des solutions du système formé par ces deux équations, appelé *courbe caractéristique de l'enveloppe*. La réunion de ces courbes caractéristiques définit l'enveloppe. Comme $(N(t), N'(t))$ est une famille libre, le système admet des solutions et la courbe caractéristique est une droite engendrée par $N(t) \wedge N'(t)$. Or cela est vrai pour tout t . L'enveloppe est donc une surface réglée. Or cette enveloppe est tangente aux plans de la famille. Donc chaque plan est un plan tangent de l'enveloppe qui ne varie pas le long de chaque génératrice. L'enveloppe est donc une surface développable de directrice α et les génératrices sont engendrées par $N(t) \wedge N'(t)$. Voir [7]. ■

Références

- [1] FUCHS Dmitry, TABACHNIKOV Serge, et al. More on Paperfolding. *The American Mathematical Monthly*, Jan. 1999, Vol. 106, No. 1., pp 27-35.
- [2] CARMO Manfredo Perdigão do. *Differential Geometry of Curves And Surfaces*. Prentice-Hall, 1976.
- [3] SPIVAK Michael. *A comprehensive introduction to differential geometry*. Vol. 2. Publish Or Perish Inc, 1999
- [4] BERGER Marcel, GOSTIAUX Bernard, et al. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*. Broché, 1992.
- [5] MORVAN Jean-Marie. *Generalized Curvatures*. Springer, 2008. (Geometry and computing 2).
- [6] PRESSLEY Andrew. *Elementary differential geometry*. Springer, 2001. (Springer undergraduate mathematics series).
- [7] FERNÁNDEZ-JAMBRINA Leonardo. Rational developable surfaces. 7th *International Conference on Mathematical Methods for Curves and Surfaces*, Tønsberg, Noruega, 2008.
- [8] LAVILLE Guy. *Courbes et surfaces*. Broché, 2004. (CAPES - Agrégation mathématiques).