

# Le retournement de la sphère d'Adam et Witold Bednorz

Lisa Balsollier

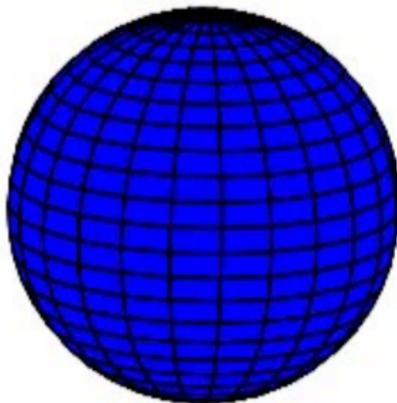
Encadrant : Vincent Borrelli

28 août 2018

## Introduction

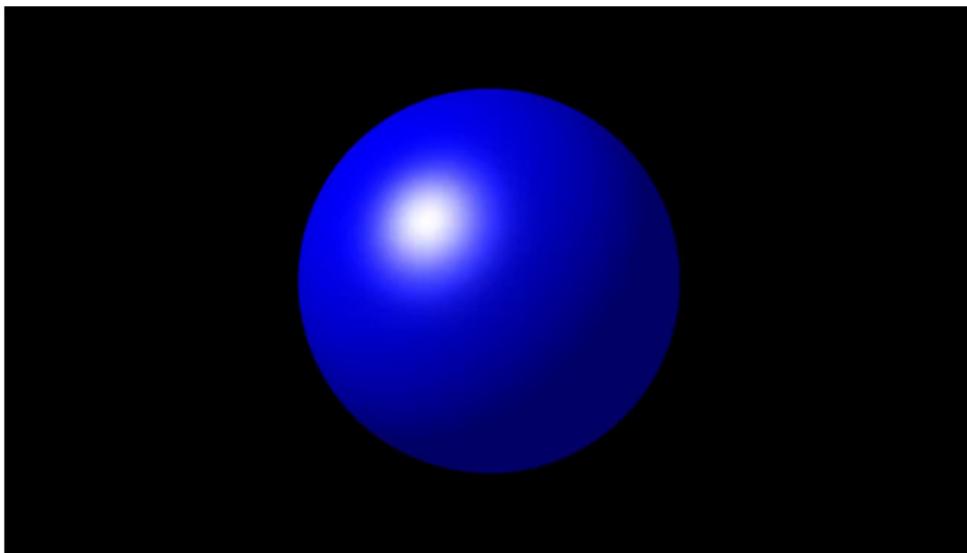
S. Smale (1957) : On peut retourner la sphère en respectant les trois règles suivantes :

- ▶ la surface doit rester lisse
- ▶ la surface ne doit pas être déchirée ou découpée
- ▶ les auto-intersections sont permises



## But du stage

- ▶ Décrire un retournement de la sphère imaginé par Adam et Witold Bednorz et présenté dans l'article "*Analytic sphere eversion with minimum of topological events*" en 2017.



## Prérequis : Sous-variété, carte locale et atlas

### Définitions

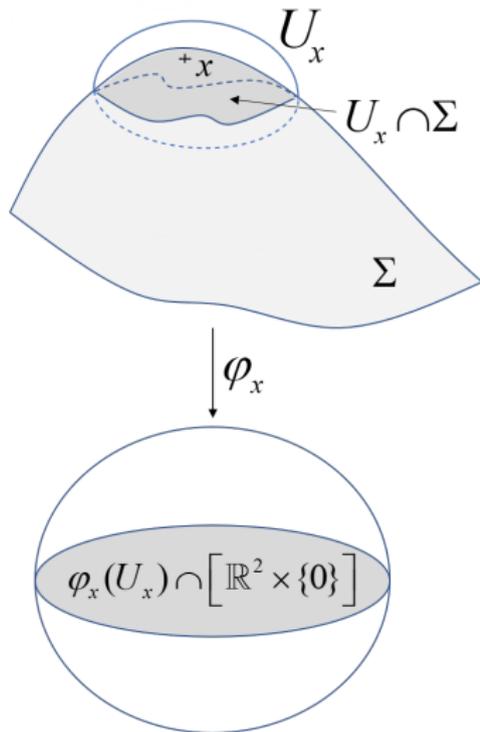
Un sous-ensemble  $\Sigma$  de  $\mathbb{R}^n$  est une **sous-variété de dimension  $k$  et de classe  $C^p$**  si  $\forall x \in \Sigma$ , il existe un voisinage ouvert du point  $x$ ,  $U_x$ , et un  $C^p$ -difféomorphisme

$\varphi_x : U_x \rightarrow \varphi_x(U_x) \subset \mathbb{R}^n$  tel que :

$$\varphi_x(U_x \cap \Sigma) = \varphi_x(U_x) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}]$$

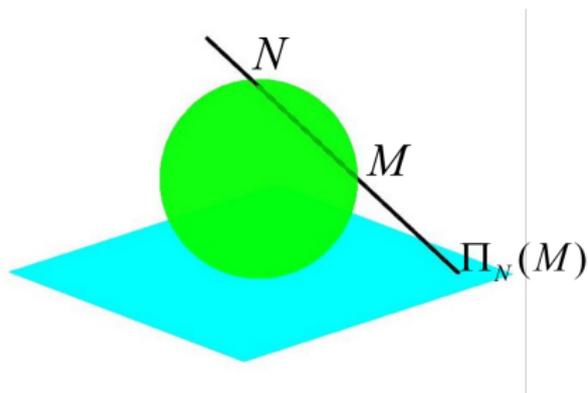
On dit alors que  $(U_x \cap \Sigma, \varphi_x)$  est une **carte locale** de  $\Sigma$  et l'ensemble

$\{(U_x \cap \Sigma, \varphi_x), x \in \Sigma\}$  est appelé **atlas** de  $\Sigma$ .



## Prérequis : Projection stéréographique

$$\begin{aligned} \varphi_N : \mathbb{R}^3 \setminus \{z = 1\} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto \left( \frac{2x}{1-z}, \frac{2y}{1-z}, 1 - (x^2 + y^2 + z^2) \right) \end{aligned}$$

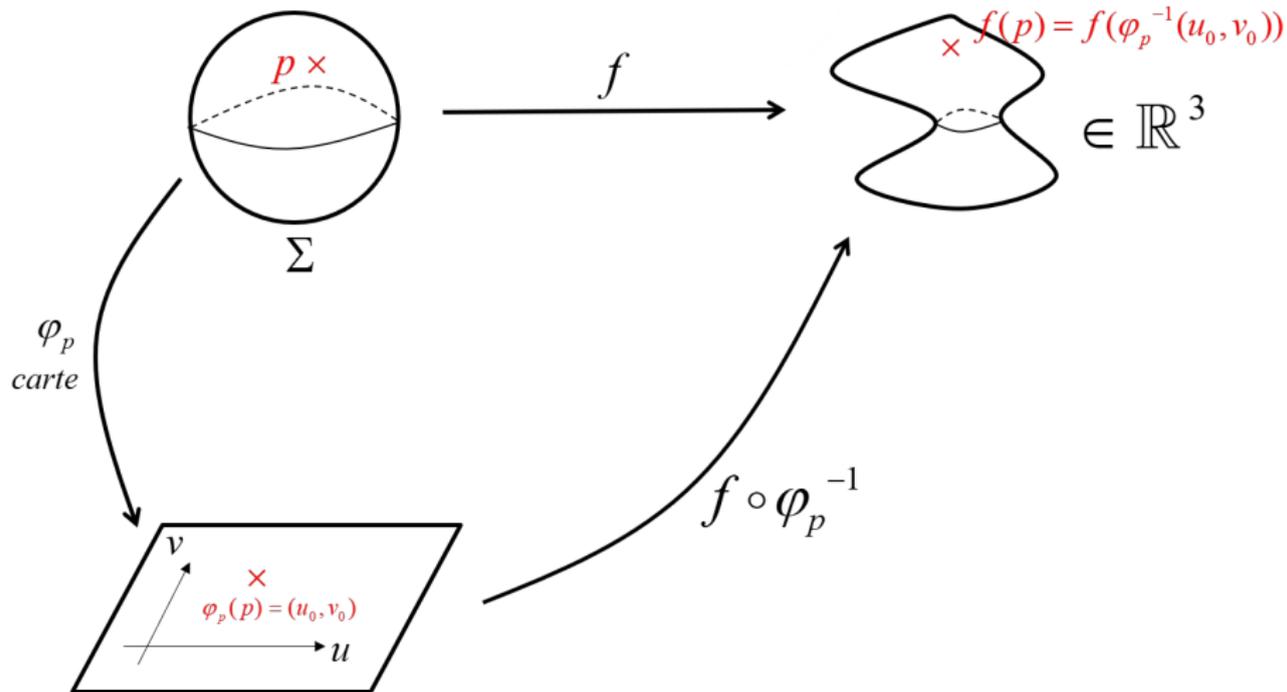


$(\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}, \varphi_N)$  est une carte locale  
 pour tout point de  $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$

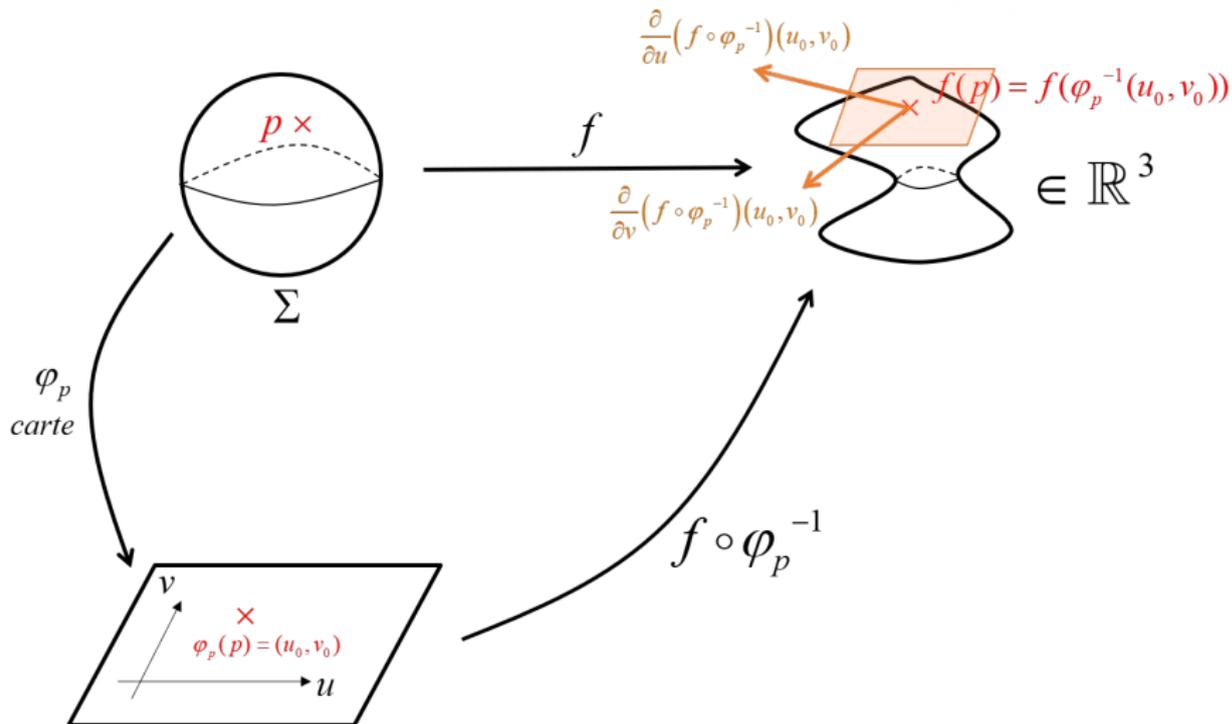
## Exemple : La projection stéréographique de la Terre



## Prérequis : Classe $C^k$



## Prérequis : Immersion, plan tangent



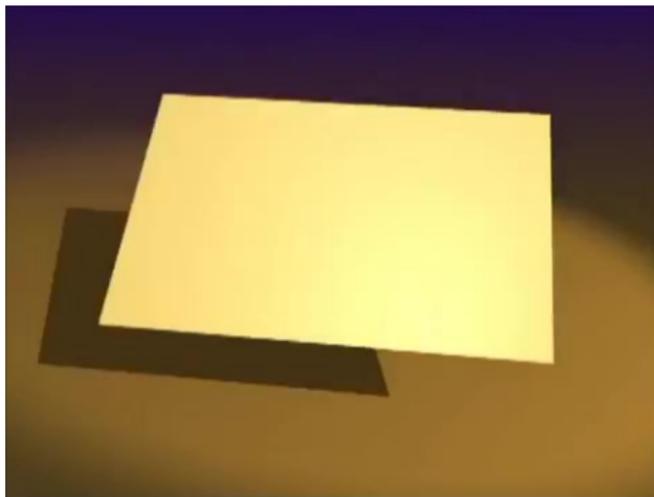
## Prérequis : Homotopie régulière

### Définitions

On dit que  $f_{t_0}$  et  $f_{t_1}$  sont **régulièrement homotopes** s'il existe  $F : \Sigma \times [t_0; t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , une application  $C^\infty$  telle que :

- ▶  $F(., t_0) = f_{t_0}$
- ▶  $F(., t_1) = f_{t_1}$
- ▶  $\forall t \in [t_0; t_1], F(., t)$  est une immersion

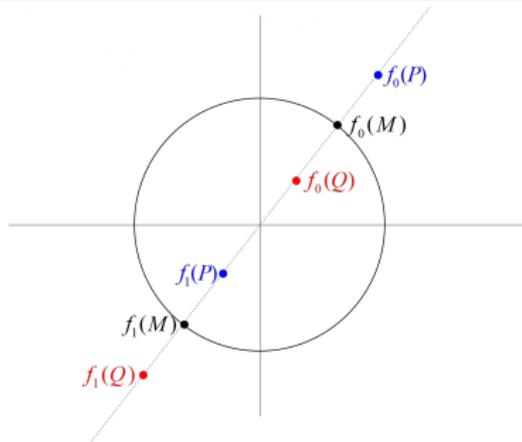
On dit que  $(F(., t))_{t \in [t_0; t_1]}$  est une **homotopie régulière** joignant  $f_{t_0}$  à  $f_{t_1}$ .



# Le retournement

On note :

$$\begin{aligned} \text{Inv}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ x &\mapsto \frac{x}{\|x\|^2} \end{aligned}$$



## Définitions

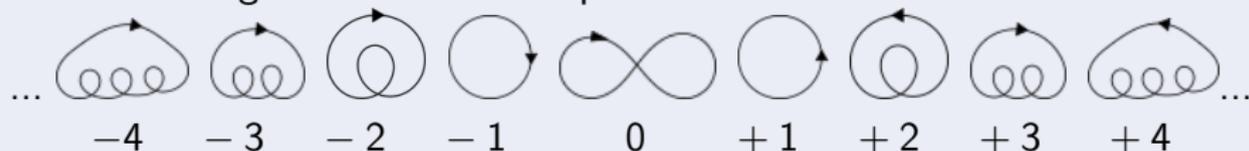
- ▶ **Retourner le cercle** c'est montrer que l'inclusion canonique  $f_0 : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$  et  $f_1 = -\text{Inv}_{\mathbb{R}^2} \circ f_0$  sont régulièrement homotopes.
- ▶ **Retourner la sphère** c'est montrer que l'inclusion canonique  $f_0 : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  et  $f_1 = -\text{Inv}_{\mathbb{R}^3} \circ f_0$  sont régulièrement homotopes.

## Un exemple historique : le retournement du cercle

### Théorème de Whitney-Graustein, 1936 (*énoncé informel*)

Soit  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  une immersion.

Alors  $f$  est régulièrement homotope à l'une des immersions suivantes :

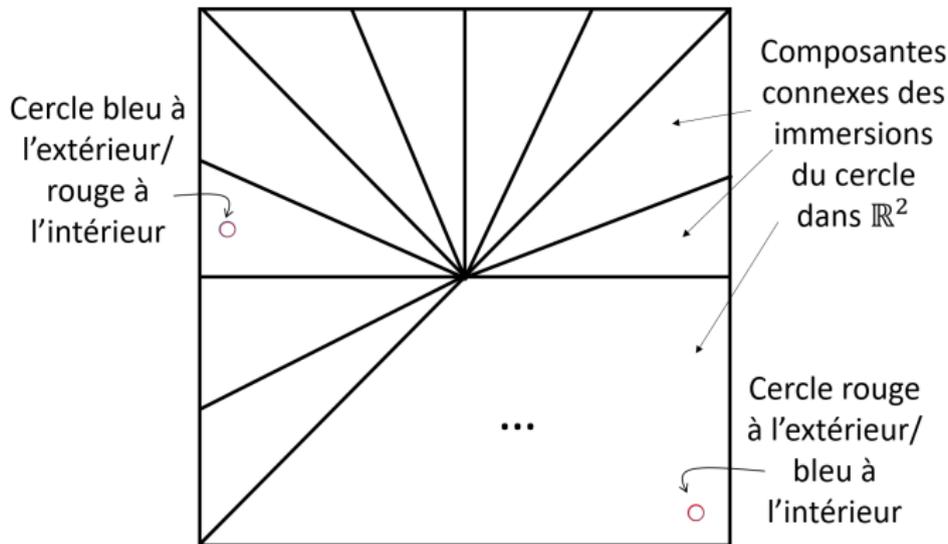


"être régulièrement homotope"  $\iff$  "être dans la même composante connexe par arcs de  $I(S^1, \mathbb{R}^2)$ "

# Le retournement du cercle

## Corollaire

Le cercle unité ne se retourne pas dans le plan.



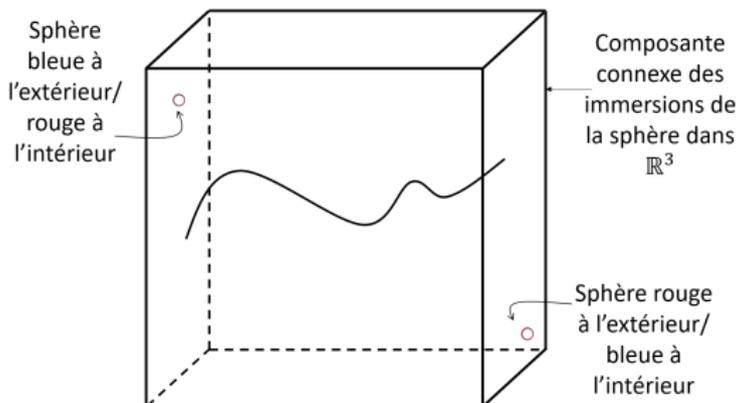
# Le retournement de la sphère

## Théorème de Smale, 1957

L'espace  $I(S^2, \mathbb{R}^3)$  est connexe par arcs.

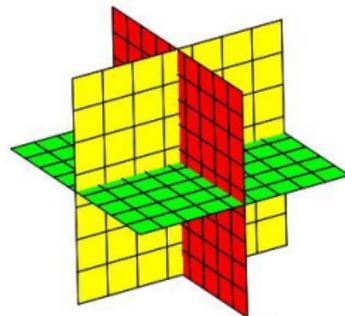
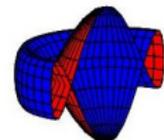
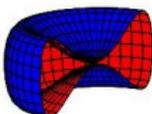
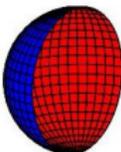
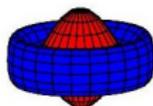
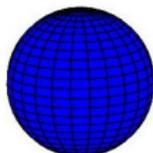
## Corollaire

Le retournement de la sphère est possible.



## Différents types de points d'auto-intersection

- ▶ Point double, triple, quadruple...
- ▶ Point double transverse
- ▶ Point triple transverse
- ▶ Point quadruple transverse



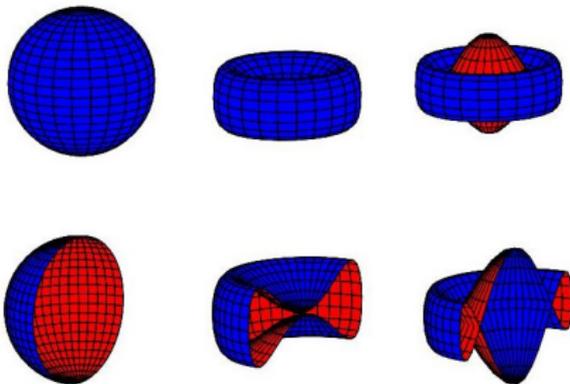
## Différents types d'immersions

### Immersion transversale :

- ▶ Point double transverse
- ▶ Point triple transverse
- ▶ Un nombre fini de points triples transverses

On note :

- ▶  $I(S^2, \mathbb{R}^3)$
- ▶  $I_\tau(S^2, \mathbb{R}^3)$

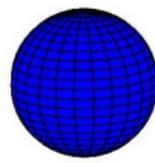
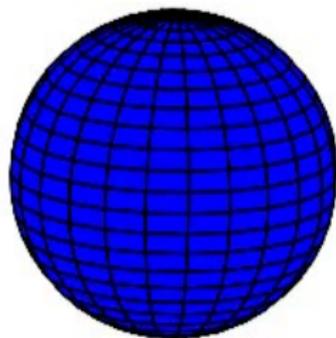
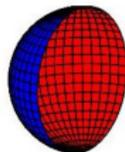
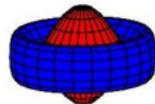
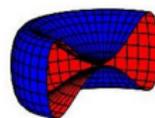
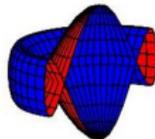


# Événement topologique

## Définition : Événement topologique

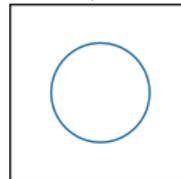
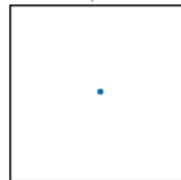
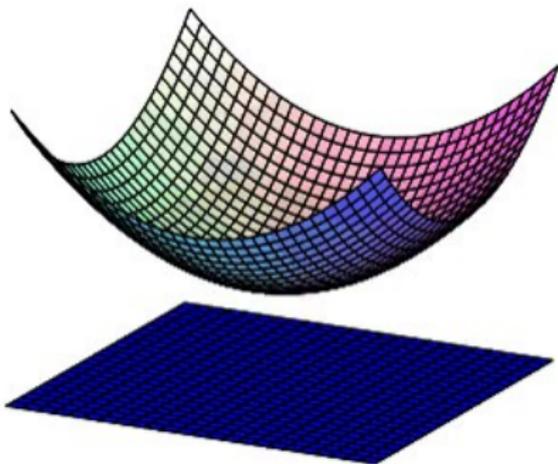
Homotopie régulière  $(f_t)$ ,  $t \in [-\epsilon, \epsilon]$ , telle que :

- ▶  $f_t \in I_\tau(S^2, \mathbb{R}^3)$ ,  $\forall t \in [-\epsilon, \epsilon] \setminus \{0\}$
- ▶  $f_0 \in I(S^2, \mathbb{R}^3) \setminus I_\tau(S^2, \mathbb{R}^3)$


 $f_{-\epsilon}$ 

 $f_0$ 

 $f_\epsilon$ 


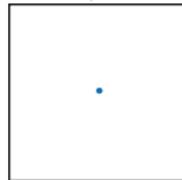
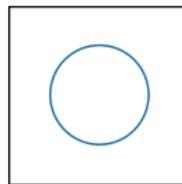
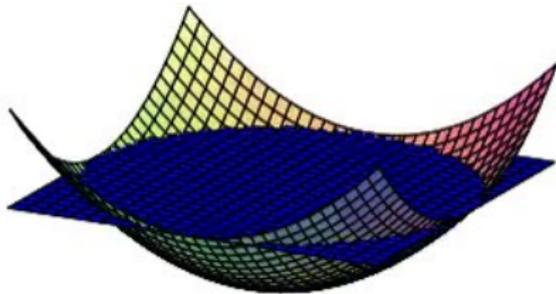
# Événements topologiques génériques

Événement  $D_0$



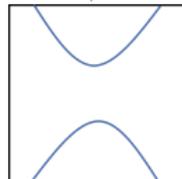
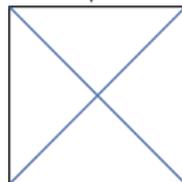
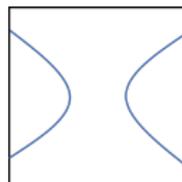
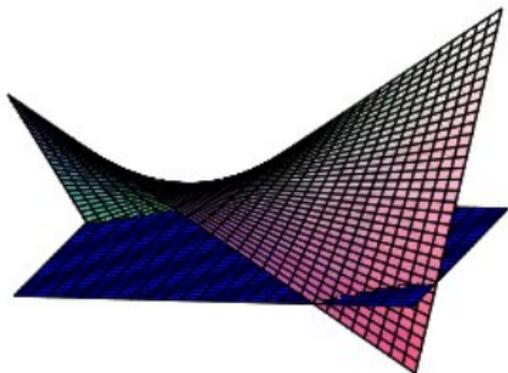
# Événements topologiques génériques

Événement  $D_2$



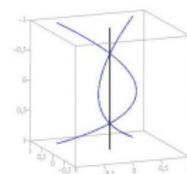
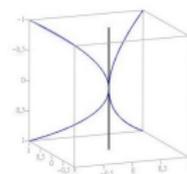
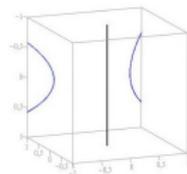
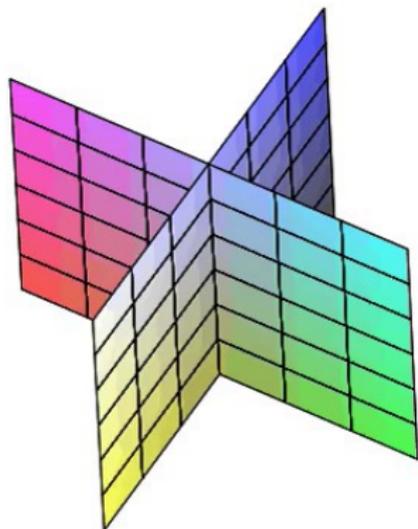
# Événements topologiques génériques

Événement  $D_1$



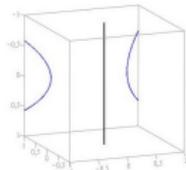
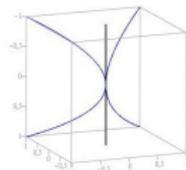
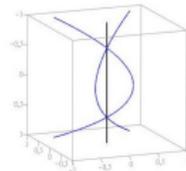
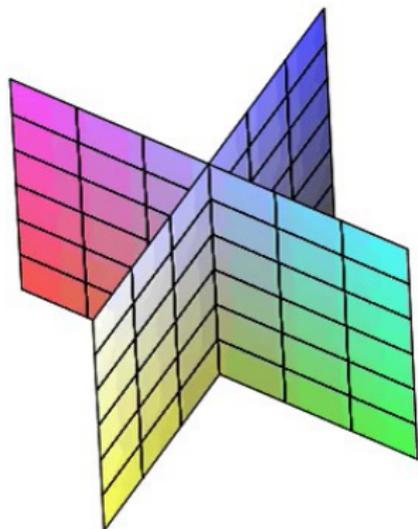
# Événements topologiques génériques

Événement  $T^+$



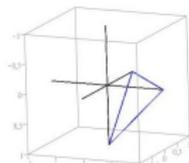
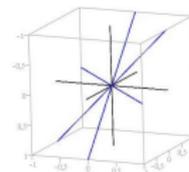
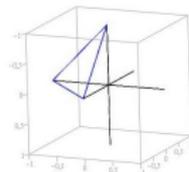
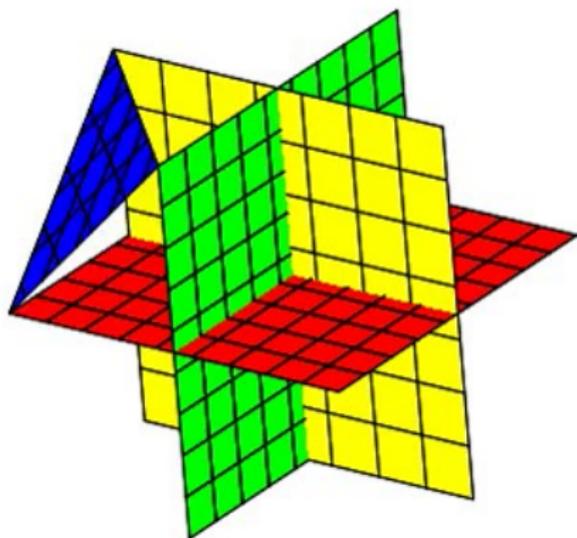
# Événements topologiques génériques

Événement  $T^-$

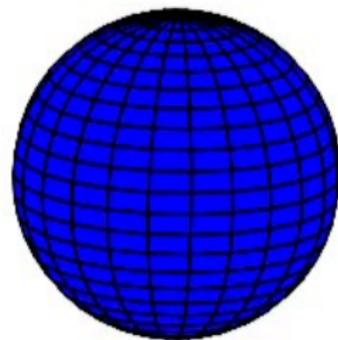
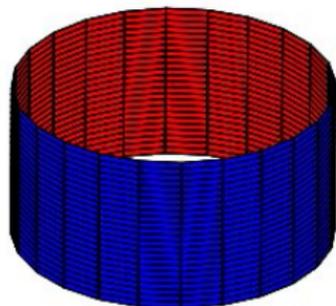


# Événements topologiques génériques

Événement  $Q$

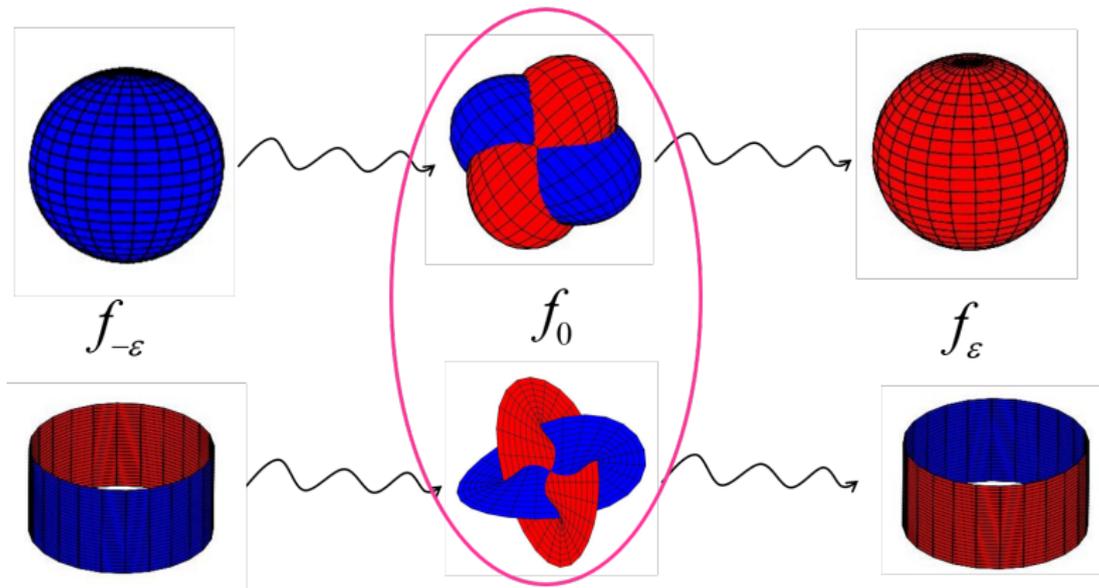


# Retourner le cylindre

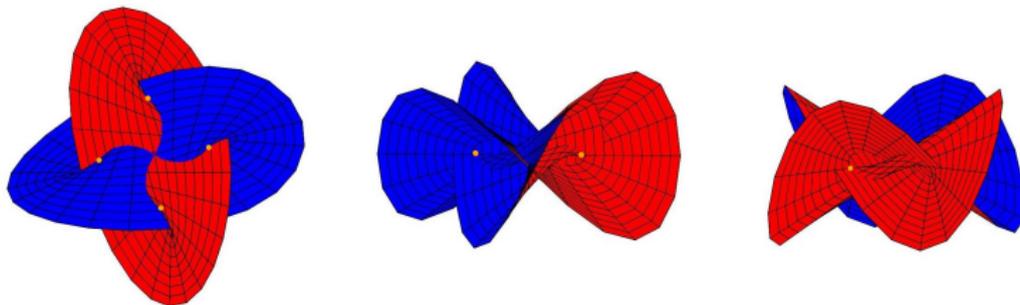


# Modèle central

## Modèle central



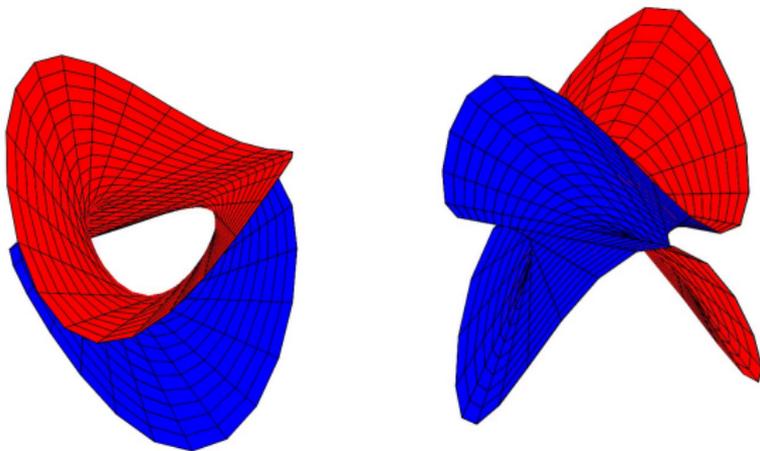
# Description des points d'auto-intersection de la surface centrale



- ▶ des points doubles transverses
- ▶ un point quadruple transverse
- ▶ 4 points doubles non transverses

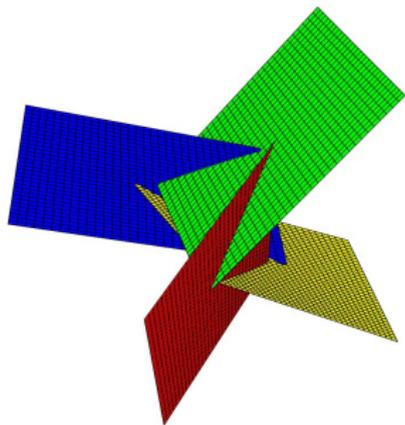
# Homotopie régulière permettant de retourner le cylindre

$$\tilde{f}_t : \begin{pmatrix} h \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t \cos(\varphi) + (1 - \frac{2}{3}|t| - h) \sin(\varphi) \\ t \sin(\varphi) + (1 - \frac{2}{3}|t| + h) \cos(\varphi) \\ h \sin(2\varphi) - \frac{t}{2} \cos(2\varphi) - \frac{2}{3}th \end{pmatrix}, \forall (\varphi, h) \in [0, 2\pi] \times [-3, 3]$$

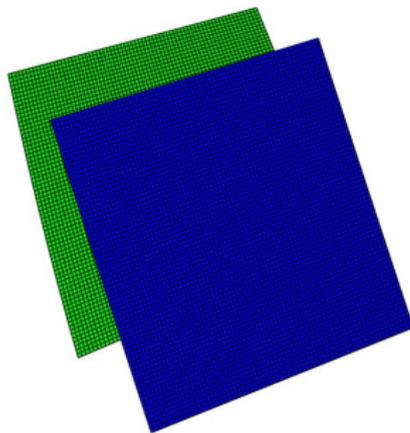


# Etude de $\tilde{f}_0$ , modèle central du retournement du cylindre

En  $(0, 0, 0)$  :

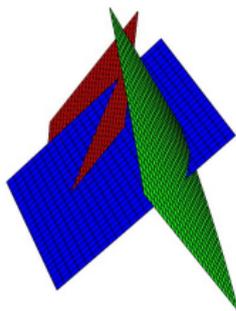


En  $(\pm\sqrt{2}, 0, 0)$  et  $(0, \pm\sqrt{2}, 0)$  :

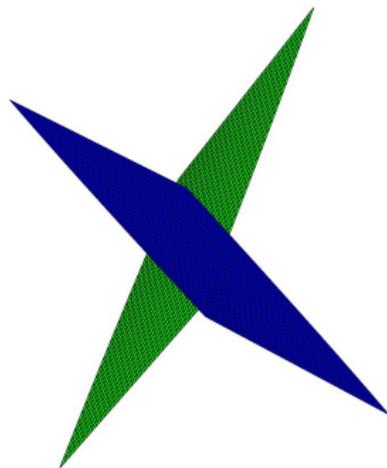


- ▶ un événement  $Q$  et 4 événements  $D_1$

Etude de  $\tilde{f}_{t>0}$ 

 En  $\left(\pm \frac{\sqrt{17}-5}{2\sqrt{2}}, \mp \frac{\sqrt{17}-5}{2\sqrt{2}}, 0\right)$  :


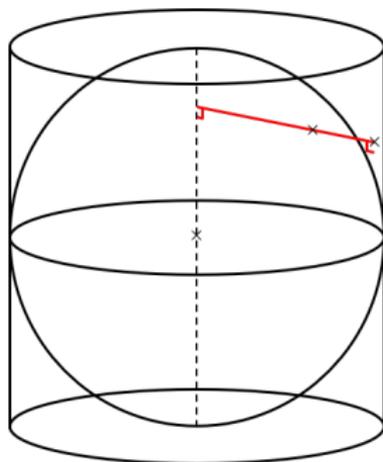
- ▶ 2 événements  $T^-$

 En  $(0, 0, 0)$  :


- ▶ un événement  $D_2$

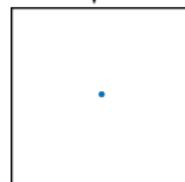
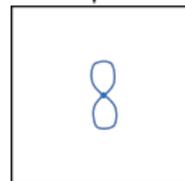
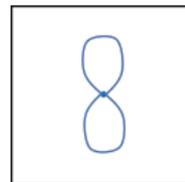
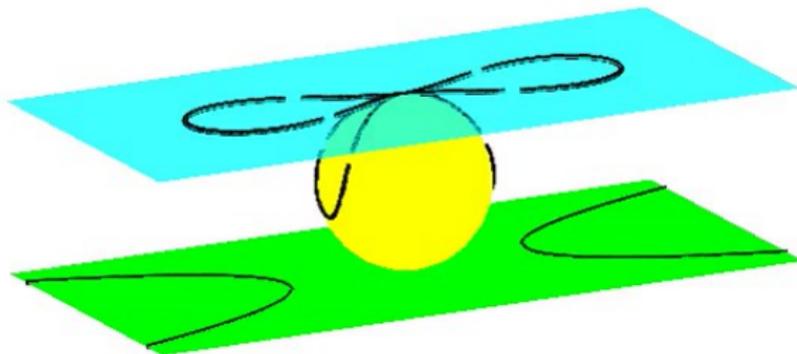
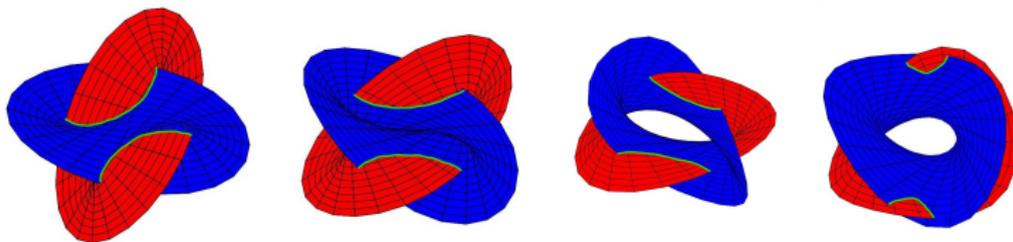
# Du cylindre à la sphère : Principe général

$S^2 \setminus \{N, S\}$  et le cylindre  $C = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$  sont homéomorphes.





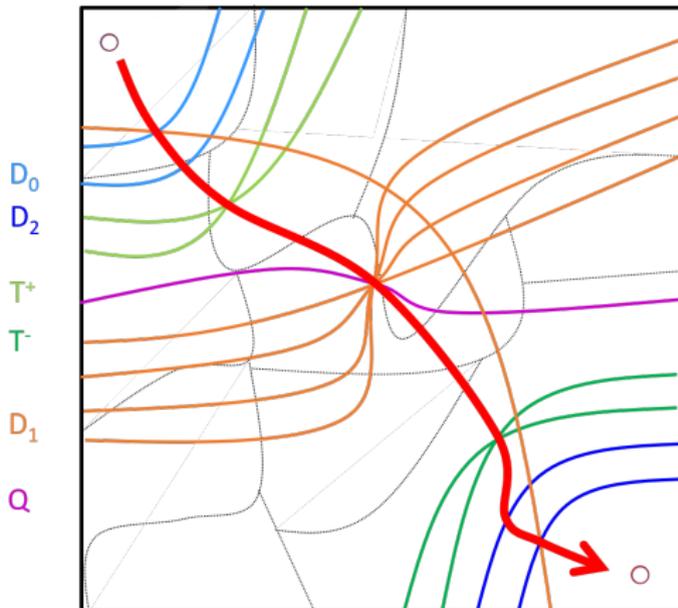
# Disparition de la courbe d'auto-intersection



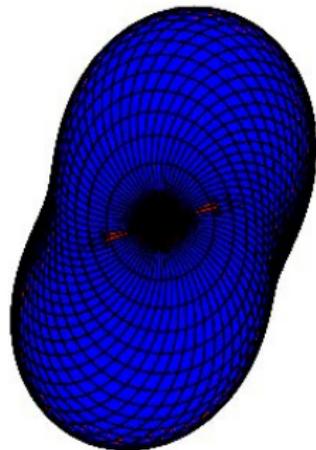
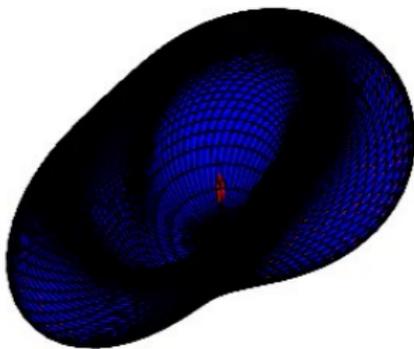
# Bilan des événements topologiques

Au cours du retournement, il y a eu :

- ▶ à  $t = 0$ , un événement  $Q$  et quatre événements  $D_1$
- ▶ à  $t \simeq 0.3$ , deux événements  $T^-$
- ▶ à  $t \simeq 0.6$ , un événement  $D_2$
- ▶ à  $t = \frac{3}{2}$ , un événement  $D_{12}$



# Retournement complet



Merci de votre attention.