

Intégration convexe pour les courbes à courbure constante

Stage de L3 à l'ENS de Lyon

Mickaël Kourganoff
Maître de stage : Vincent Borrelli

Institut Camille Jordan, Lyon 1
Du 19 mai au 29 juin 2010

1 Introduction

L'étude des courbes à courbure constante dans le plan \mathbb{R}^2 est vite terminée : il s'agit des droites et des cercles. En effet, de manière plus générale, la courbure caractérise entièrement la courbe à translation près. Dans \mathbb{R}^3 , on voit apparaître un nouveau paramètre, la torsion, qui s'ajoute à la courbure pour caractériser les courbes : les courbes à courbure constante sont donc très nombreuses et variées dans \mathbb{R}^3 , et *a fortiori* dans $\mathbb{R}^{n \geq 3}$. Elles sont même denses dans les courbes \mathcal{C}^1 , en un certain sens : étant donnée une constante k_0 , toute courbe de courbure inférieure à k_0 peut être approchée pour la norme \mathcal{C}^1 par une autre courbe qui, elle, possède une courbure constante égale à k_0 . C'est cette affirmation que nous allons prouver, en reprenant les arguments de la référence [1].

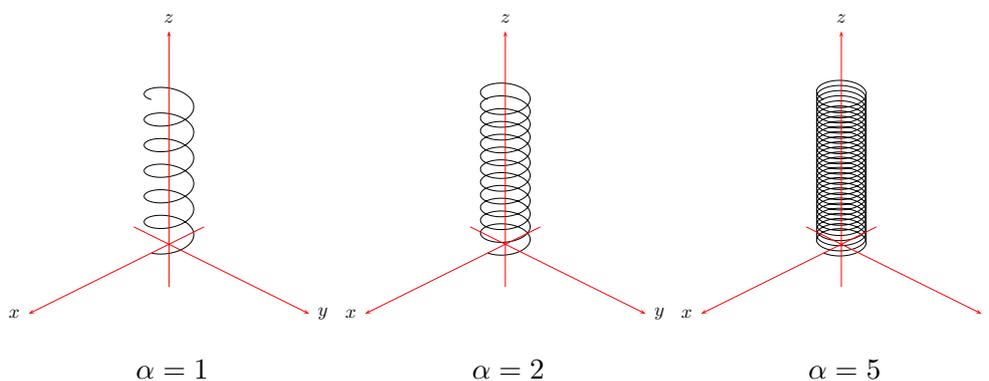
1.1 Exemples

Prenons pour commencer un segment vertical dans l'espace :

$$f_0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} (t \in [0, 1]),$$

et une constante $c > 0$. Le théorème affirme l'existence d'une courbe à courbure constante \mathcal{C}^1 -proche de f_0 . On peut commencer par approximer le segment par une hélice, par exemple :

$$f_1(t) = \begin{pmatrix} \epsilon \cos \alpha t \\ \epsilon \sin \alpha t \\ t \end{pmatrix}.$$

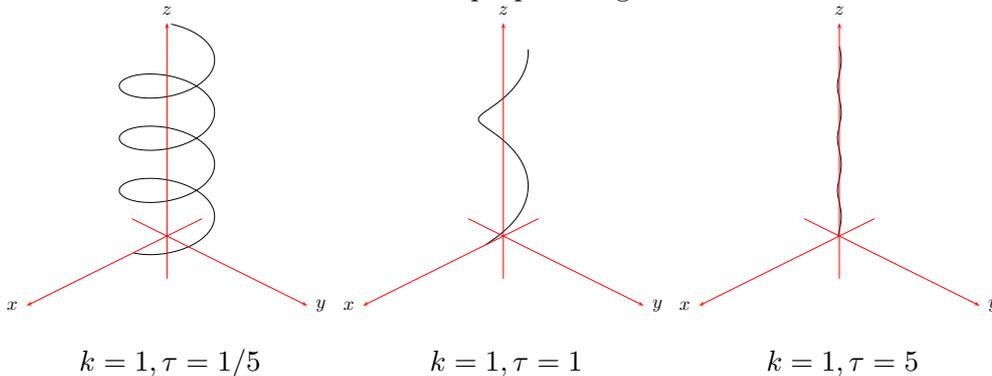


On peut être aussi proche que l'on veut du segment en faisant varier ϵ , puis on peut faire varier la courbure à volonté en faisant varier α . Cependant, lorsque α devient élevé, la dérivée s'éloigne beaucoup de celle de la fonction d'origine. L'hélice est donc \mathcal{C}^0 -proche du segment initial, mais pas \mathcal{C}^1 -proche. Pour que la courbe soit \mathcal{C}^1 -proche, il faut éviter les variations horizontales de la fonction, c'est-à-dire garder une torsion élevée par rapport à la courbure. On considère cette fois la famille suivante d'hélices, de courbure k et de torsion τ :

$$f_{k,\tau}(t) = \begin{pmatrix} \frac{k}{\tau^2+k^2} \cos \sqrt{\tau^2+k^2}t \\ \frac{k}{\tau^2+k^2} \sin \sqrt{\tau^2+k^2}t \\ \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2+k^2}}t \end{pmatrix}$$

$$f'_{k,\tau}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{k}{\sqrt{\tau^2+k^2}} \sin \sqrt{\tau^2+k^2}t \\ \frac{k}{\sqrt{\tau^2+k^2}} \cos \sqrt{\tau^2+k^2}t \\ \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2+k^2}} \end{pmatrix}$$

Fixons k et faisons tendre τ vers l'infini : dans ces conditions, $f_{k,\tau}$ tend vers f_0 pour la norme \mathcal{C}^1 , ce qui répond à notre problème. La seule chose qui a changé par rapport à la solution précédente, c'est qu'on réduit le diamètre de l'hélice en même temps qu'on augmente le nombre de tours autour de l'axe.



Avec cet exemple, on peut avoir une idée de la manière de procéder pour approcher une courbe quelconque. Après tout, une courbe \mathcal{C}^1 peut être approchée de manière \mathcal{C}^1 par une fonction affine par morceaux (grâce à l'uniforme continuité de la fonction et de sa dérivée), donc on pourrait penser qu'il suffit de recoller des hélices. Oui mais, comment les recoller ? Non seulement le recollement doit être \mathcal{C}^α , mais en plus la courbure doit être maintenue à l'endroit du recollement. L'enjeu de l'article est donc de trouver comment créer des sortes d'hélices que l'on va réussir à recoller. La démonstration de l'article est presque entièrement constructive.

Il peut être amusant de noter que, étrangement, le cas où f_0 est une droite est presque le seul cas où la démonstration de l'article n'est pas vraiment constructive. Plus précisément, dans le cas où la courbure de f_0 s'annule, l'auteur a recours au *théorème de transversalité de Thom* qui permet d'approcher la courbe par une autre dont la courbure ne s'annule pas, et le problème est réglé. Les résultats donnés par le théorème pour une droite seront donc beaucoup moins élégants qu'une simple hélice.

Il est maintenant temps d'énoncer le théorème de manière plus formelle.

1.2 Théorème

Soit $\Gamma = [a, b]$ ou $\Gamma = \mathbb{R}/(b-a)\mathbb{Z}$. Soit $f_0 \in \text{Imm}^{2 \leq \alpha \leq +\infty}(\Gamma, \mathbb{R}^{n \geq 3})$ une courbe de courbure k_0 . Alors pour tout $\epsilon > 0$ et $c > \max[k_0]$, il existe $f_1 \in \text{Imm}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R}^n)$ de courbure constante c telle que $\|f_1 - f_0\|_{\mathcal{C}^1} = \|f_1 - f_0\|_\infty + \|f'_1 - f'_0\|_\infty \leq \epsilon$.

Remarque Le théorème reste vrai pour $c = \max[k_0]$. Cependant, la démonstration fait intervenir le *théorème de transversalité de Thom*, et ce n'est pas un point central dans la compréhension.

Reparamétrage Supposons que le théorème soit vrai pour f_0 paramétrée par la longueur d'arc. Un rapide calcul montre qu'alors le théorème est vrai pour f_0 quelconque. On supposera à partir de maintenant que f_0 est paramétrée par la longueur d'arc. Dans ce cas, la dérivée est une courbe à valeurs dans \mathbb{S}^{n-1} .

1.3 Théorème-clé : Approximation d'une courbe sphérique par une courbe à vitesse constante

Idée Dire que f_1 a une courbure constante, c'est dire que sa dérivée a une vitesse de norme constante. On va donc maintenant travailler sur la dérivée, qui est à valeurs dans la sphère \mathbb{S}^{n-1} .

Définitions

- On définit la moyenne et le centre de masse de $f \in C^{\alpha \geq 1}([a, b], \mathbb{R}^n)$:

$$\text{ave}[f] = \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{cm}[f] = \int_a^b f(x) \|f'(x)\| dx$$

Le centre de masse est invariant par reparamétrage.

- Soient deux points x et $p \in \mathbb{S}^{n-1}$. On peut alors définir le symétrique x' de x par rapport à p comme suit : si $x = \pm p$, on pose $x' := x$. Sinon, x' est le point autre que x sur le grand cercle passant par x et p tel que $\text{dist}_{\mathbb{S}^{n-1}}(x', p) = \text{dist}_{\mathbb{S}^{n-1}}(x, p)$.

Théorème Soit $f \in \text{Imm}^{\alpha \geq 1}([a, b], \mathbb{S}^{n-1})$ et $c > \max[\|f'\|]$. On suppose $\text{int conv}[f([a, b])] \neq \emptyset$. Alors il existe $\tilde{f} \in \text{Imm}^{\alpha \geq 1}([a, b], \mathbb{S}^{n-1})$ de vitesse constante c , et $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \tilde{f}(x) dx$ (c'est-à-dire $\text{ave } f = \text{ave } \tilde{f}$), $\tilde{f}(a) = f(a)$, $\tilde{f}(b) = f(b)$. Si de plus f est définie sur un voisinage de $[a, b]$, on peut demander que \tilde{f} se prolonge et que pour tout $\eta > 0$ il existe $\tilde{\eta} > 0$ tel que $\tilde{f}([a, a + \tilde{\eta}]) \subseteq f([a, a + \eta])$ et $\tilde{f}([b - \tilde{\eta}, b]) \subseteq f([b - \eta, b])$ (c'est-à-dire, les traces des deux courbes coïncident au voisinage des extrémités du segment).

Idée de la preuve Posons $\lambda = \text{ave}[\|f'\|]/c$. La première idée serait de construire \tilde{f} tout simplement en effectuant un reparamétrage de f de sorte à forcer la vitesse à être constante égale à c . Ceci n'est pas la bonne solution pour deux raisons :

- On demande que la courbe soit définie sur $[a, b]$, or la courbe après reparamétrage ne sera définie que sur $[a, a + \lambda(b - a)]$.
- La moyenne de \tilde{f} est alors égale à $\text{cm}[f]$ et non pas à $\text{ave}[f]$.

Une idée naturelle (utilisée dans l'intégration convexe classique) est alors de s'attarder sur certains points bien choisis dans $f([a, b])$ pour influencer la moyenne. Comme il est interdit de s'arrêter ou même de ralentir, il va falloir faire des boucles autour des points voulus. Parcourir la courbe à la vitesse c prendra le temps $\lambda(b - a)$: le temps total passé à faire des boucles sera donc de $(1 - \lambda)(b - a)$. La moyenne de \tilde{f} sera alors $\lambda \text{cm}[f] + (1 - \lambda)x$, où le point x sera un point dans l'enveloppe convexe de $f([a, b])$. Comme on veut que cette moyenne soit égale à $\text{ave}[f]$, il faut poser $x = \frac{\text{ave}[f] - \lambda \text{cm}[f]}{1 - \lambda}$. Par chance (?), ce point se trouve toujours dans l'enveloppe convexe de f , et même dans l'intérieur (cf.

lemme 1). Il ne reste plus qu'à déterminer des points x_1, \dots, x_r dans l'enveloppe convexe desquels se trouve x et à mettre des boucles avec les bonnes longueurs à ces points. La façon de construire ces boucles est donnée par le **lemme 5**.

Jusqu'ici, tout semble bien fonctionner. Malheureusement, on se trouve confronté à un problème majeur : les boucles sont tracées sur la sphère \mathbb{S}^{n-1} et par conséquent, leur moyenne ne va pas être exactement sur la sphère, mais légèrement à l'intérieur, c'est-à-dire que la moyenne de chaque boucle sera de la forme $(1 - \delta)x_i$ avec $\delta > 0$. On va donc choisir $x_1, \dots, x_r \in f(]a, b[)$ tels que $x \in \text{int conv}[x_1, \dots, x_r]$, et exprimer, pour δ assez petit, le point $\frac{x}{1-\delta}$ comme barycentre à coefficients positifs des x_i . Les deux décalages se compenseront et on obtiendra bien x comme moyenne.

Il reste maintenant un dernier détail à régler : pour que la moyenne d'une boucle soit égale à $(1 - \delta)x_i$, encore faut-il que la boucle soit assez grande (une boucle trop petite aura nécessairement une moyenne très proche de la sphère unité). Rappelons que la taille de la boucle est imposée par le coefficient barycentrique de x_i dans l'expression de x (on reste d'autant plus longtemps autour de x_i que le coefficient est élevé). Ainsi, on aimerait avoir une minoration des coefficients barycentriques qui ne dépende pas de δ , puis choisir δ en fonction de cette minoration. Pour l'obtenir, on utilise le théorème de détermination continue des coefficients barycentriques dans l'intérieur d'un polyèdre convexe (en annexe). La preuve sera alors terminée.

2 Quelques définitions concernant la convexité

On se place toujours en dimension finie. Ce qui suit est implicitement supposé comme acquis dans [1].

2.1 Hyperplan de support

On dit que H est un hyperplan de support d'un ensemble $X \subseteq \mathbb{R}^n$ si X est entièrement d'un seul côté de H , et intersecte H , mais n'est pas entièrement contenu dans H .

Remarque Si C est un convexe fermé, et si $x \in \partial C$, alors il existe un hyperplan de support de C qui contient x . En effet, soit $x_n \in \mathbb{R}^n \setminus C$ une suite de points tendant vers x . Soit y_n la suite des projetés de x_n sur C . Alors y_n tend vers x et de plus, pour tout n , l'hyperplan orthogonal à $\frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|}$ passant par y_n est un hyperplan de support de C . Quitte à extraire, on peut supposer que la suite $\frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|}$ converge vers un vecteur unitaire v . Alors l'hyperplan orthogonal à v et contenant x est un hyperplan de support de C , par passage à la limite dans les inégalités.

2.2 Intérieur relatif

Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ et F l'espace affine engendré par X . Alors l'intérieur relatif de X , noté $\text{rel int}[X]$, est l'intérieur de X pour la topologie naturelle de F .

Remarque L'intérieur relatif d'un convexe non vide est non vide. En effet, supposons quitte à translater que $0 \in X$, et soit $(e_1, \dots, e_r) \in X^r$ une base de l'espace vectoriel F : tout point x de F s'écrit $\sum_1^r x_i e_i$, et l'enveloppe convexe de $0, e_1, \dots, e_r$ est une boule de diamètre 1 pour la norme définie par $\|x\| = \sum_1^r \|x_i\|$.

Intérieur relatif de l'enveloppe convexe Un point x appartient à $\text{rel int conv}[X]$ si et seulement si pour tout hyperplan H contenant x mais ne contenant pas X entier, il existe au moins un point de X de chaque côté de H . Pour démontrer ceci, on peut commencer, quitte à se restreindre au sous-espace affine engendré par X , que $\text{int conv}[X] \neq \emptyset$. L'implication directe devient alors évidente, tandis que

l'autre sens découle directement de l'existence d'hyperplans de support passant par n'importe quel point de la frontière (voir plus haut).

3 Lemmes pour le théorème-clé

3.1 Lemme 1

Ce lemme permet de voir que le point x mentionné précédemment se trouve dans l'enveloppe convexe de $f([a, b])$.

Énoncé Soit $f \in \text{Imm}^{\alpha \geq 1}([a, b], \mathbb{R}^n)$. Alors :

$$x = \frac{\text{ave}[f] - \lambda \text{cm}[f]}{1 - \lambda} \in \text{rel int conv}[f([a, b])]$$

pour toute constante $0 \leq \lambda < \frac{\text{ave}(\|f'\|)}{\max(\|f'\|)}$.

Démonstration (ébauche) On introduit la notion de centre de masse pondéré $\text{cm}[f, \rho]$ où ρ est une fonction de densité de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

Si ρ est strictement positive, on a $\text{cm}[f, \rho] \in \text{rel int conv}[f]$.

En particulier, $\text{ave}[f] = \text{cm}[f, \rho]$ pour une certaine densité ρ bien choisie. Or il se trouve que le point x est égal à $\text{cm}[f, \rho - \lambda]$, et qu'avec le choix que nous avons fait de λ , $\rho - \lambda$ est positif, ce qui conclut. \square

3.2 Lemme 2

Énoncé Soit $p \in \mathbb{S}^{n-1}$ et H un hémisphère centré en p . Il existe une famille de plongements $\phi_t : H \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$, $t \in [0, 1[$, qui sont lisses (mieux : la fonction $\Phi : (x, t) \mapsto \phi_t(x)$ est lisse) qui préservent la symétrie par rapport à p , et telle que ϕ_0 est l'identité, chaque ϕ_t est l'identité sur un voisinage de p , ϕ_t converge vers p lorsque t tend vers 1, et pour tout couple de points $q, r \in H$ et $t > s$,

$$\text{dist}_{\mathbb{S}^{n-1}}(\phi_t(q), \phi_t(r)) \leq \text{dist}_{\mathbb{S}^{n-1}}(\phi_s(q), \phi_s(r)).$$

Enfin, pour tout voisinage U de p , on peut demander que l'inégalité ci-dessus soit stricte dès que p ou r se trouve en dehors de U .

Démonstration Nous ne prouverons pas ce lemme, car la démonstration, naturelle mais technique, n'apporte pas grand-chose à la compréhension générale du théorème.

3.3 Lemme 3

Énoncé Soit $f_0 \in \text{Imm}^{\alpha \geq 1}([a, b], \mathbb{S}^{n-1})$, et $f_0(a) = p = f_0(b)$. On suppose que $f_0([a, b])$ est contenue dans un hémisphère centré en p . Il existe alors une famille d'immersions $f_t \in \text{Imm}^{\alpha}([a, b], \mathbb{S}^{n-1})$ pour $t \in [0, 1[$ telle que $F : (x, t) \mapsto f_t(x)$ soit de classe C^α , et telle que f_t converge uniformément vers p lorsque t tend vers 1. On peut demander que pour tout t il existe un voisinage ouvert des extrémités de $[a, b]$ où $f_t = f_0$. Si de plus, il existe $\delta_0 < 1$ tel que $\text{cm}[f_0] = (1 - \delta_0)p$, alors on peut demander que pour tout t , il existe $\delta_t < 1$ tel que $\text{cm}[f_t] = (1 - \delta_t)p$.

Démonstration On peut supposer que $\|f'_0\| = 1$. Alors f_0 est de longueur $(b - a)$. On pose $\alpha_t := \phi_t \circ f_0$, où ϕ_t est donné par le **lemme 2** où U est choisi assez petit pour ne pas contenir toute l'image de f_0 . Alors la famille (α_t) satisfait à toutes les propriétés demandées, sauf que la longueur de α_t dépend de t (de manière continue, par les propriétés de régularité énoncées au lemme 2 et par le théorème de continuité sous le signe somme). Ici, il est affirmé dans [1] que la longueur de α_t décroît strictement, ce qui est peut-être impliqué par le lemme 2, mais je ne parviens pas à le démontrer. Cependant, en regardant plus en détail la preuve du lemme 2, on parvient à prouver le résultat pour un certain type de courbes qui nous suffira pour démontrer le théorème final. Admettons donc que la longueur de la courbe décroît strictement. Pour tout $t \in [0, 1[$ il existe un unique $s(t) \in [0, 1[$ tel que $\text{longueur}[\alpha_{s(t)}] = (1 - t)(b - a)$, et s est un homéomorphisme. En composant par s , on suppose maintenant $\text{longueur}[\alpha_t] = (1 - t)(b - a)$. On effectue maintenant un reparamétrage de sorte que α_t soit défini sur $[a, b - t(b - a)]$ et ait une vitesse unitaire. On définit alors une famille de courbes complémentaires $\beta_t : [b - t(b - a), b] \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ en posant :

$$\beta_t(s) := \alpha_{1-t}(s - (1 - t)(b - a)).$$

Pour $t \in [0, 1/2]$, soit $f_t : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ la courbe obtenue en joignant α_t et β_t de manière naturelle :

$$f_t(s) := \begin{cases} \alpha_t(s) & \text{si } s \in [a, b - t(b - a)] \\ \beta_t(s) & \text{si } s \in [b - t(b - a), b] \end{cases}$$

Alors f_t est une famille continue de $\text{Imm}^\alpha([a, b], \mathbb{S}^{n-1})$. De plus, elle est de longueur constante. Remarquons maintenant que $f_{1/2}$ parcourt deux fois l'image de $\alpha_{1/2}$. Nous venons de déformer f_0 de manière continue, en conservant sa longueur et les autres propriétés voulues, de manière à ce qu'elle couvre deux fois une courbe de la moitié de la longueur de f_0 . On peut itérer cette procédure pour définir f_t , pour $t \in [1/2, 3/4]$, en commençant avec $f_{1/2}$, et terminer avec une courbe qui parcourt deux fois $f_{1/2}$, c'est-à-dire quatre fois f_0 . En itérant le procédé, on définit f_t pour tout $t \in [0, 1[$. La famille converge bien vers p car lorsque t est proche de 1, f_t couvre un grand nombre de fois une courbe de longueur très faible, donc très proche de p . \square

3.4 Lemme 4

Énoncé [Recollement de deux courbes par une immersion lisse] Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^{n \geq 2}$, $a < c < b < a' < c' < b'$, et $f \in \text{Imm}^{\alpha \geq 1}([a, b], U)$, $g \in \text{Imm}^{\alpha \geq 1}([a', b'], U)$ ainsi que $l \geq 0$. Soient $c \in [a, b]$, $c' \in [a', b']$. Alors il existe $h \in \text{Imm}^\alpha([a, b'], U)$ telle que $h|_{[a, c]} = f|_{[a, c]}$, $h|_{[c', b']} = g|_{[c', b']}$ et que la longueur de $h|_{[c, c']}$ soit supérieure à l .

Remarque Le lemme reste vrai si f et g ne sont définies que sur $[a, c]$ et $[c', b']$, grâce au théorème de Borel qui permet de faire le prolongement nécessaire. Cependant, on n'en a pas besoin dans le cadre de l'article.

Démonstration Considérons d'abord le cas particulier où $(f(c) - g(c'))$ n'est pas colinéaire à $f'(c)$ ou à $g'(c')$ et $l = 0$. Soit $d : [c, c'] \rightarrow U$ l'interpolation affine entre $f(c)$ et $g(c')$. Soit $\phi : [a, b'] \rightarrow [0, 1]$ une fonction plateau lisse, égale à 1 sur $[b, a']$ et à 0 sur $[a, c] \cup [c', b']$. Quitte à diminuer b et à augmenter a' , on peut supposer que $(f(c) - g(c'))$ n'est colinéaire à aucun $f'(t)$ ou $g'(t)$ pour $t \in [c, b]$ ou $t \in [a', c']$. On peut alors poser :

$$h(t) = \begin{cases} \phi d + (1 - \phi)f & \text{si } t \in [a, b] \\ \phi d + (1 - \phi)g & \text{si } t \in [a', b'] \end{cases}$$

Les précautions que l'on prend sur les dérivées servent à éviter que h' s'annule.

Deuxième cas : Supposons maintenant que $(f(c) - g(c'))$ est colinéaire à $f'(c)$ et/ou à $g'(c')$. On

se ramène au cas précédent en considérant des points $b < p < q < q' < p' < a'$ et une fonction affine $g_1 : [p, p'] \rightarrow U$, telle que les vecteurs $f(c) - g_1(q)$, $g_1(q') - g(c')$, $f'(c)$, $g'(c')$ et $g'_1(q)$ soient linéairement indépendants deux à deux (c'est ici qu'intervient le fait que $n \geq 2$: pour prouver qu'une telle configuration existe, on résout le problème dans le plan et on s'y ramène par projection). On relie ensuite f à g_1 puis g_1 à g .

Enfin, prenons l quelconque : il suffit donc de rallonger la courbe, par exemple en considérant deux fonctions affines g_1 et g_2 comme ci-dessus et en faisant des allers-retours entre les deux, autant de fois qu'il le faut. \square

Remarque 1 On obtient le même résultat si U est un hémisphère ouvert de $\mathbb{S}^{n \geq 2}$, grâce à la projection orthogonale naturelle de l'hémisphère sur le plan qui coupe la sphère en deux. En effet, cette projection est un difféomorphisme lipschitzien lisse depuis l'hémisphère vers un ouvert de \mathbb{R}^n .

Remarque 2 Dans [1], ce lemme est considéré comme évident, directement dans le cadre où U est un hémisphère de $\mathbb{S}^{n \geq 2}$, et on considère même qu'on peut demander que la longueur de $f|_{[c, c']}$ soit égale à l (à condition que $l > \|f(c) - g(c')\|$). Cela semble vrai mais, ne voyant pas comment le prouver, je contourne le problème.

3.5 Lemme 5

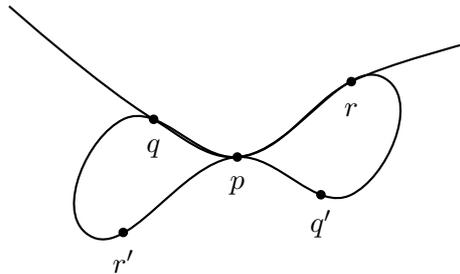
Ce lemme permet de créer des boucles autour de certains points afin de s'y attarder et d'influencer la moyenne.

Énoncé Soit $C \in \text{Imm}^{\alpha \geq 1}([a', b'], \mathbb{S}^{n-1})$ de vitesse constante égale à $c \in \mathbb{R}^{+*}$, $p = C(c') \in C([a', b'])$, ainsi que $l, l' > 0$. Il existe $\bar{\delta} > 0$ tel que pour tout $0 < \delta \leq \bar{\delta}$, $a < b$ tels que $l \leq (b - a) \leq l'$, il existe $\epsilon > 0$ et une courbe $f \in \text{Imm}^\alpha([a - \epsilon, b + \epsilon], \mathbb{S}^{n-1})$ de vitesse constante égale à c telle que

$$\text{ave}[f|_{[a, b]}] = (1 - \delta)p,$$

$$f(a) = p = f(b), f|_{]a - \epsilon, a[} = C|_{]c' - \epsilon, c'[} \text{ et } f|_{]b, b + \epsilon[} = C|_{]c', c' + \epsilon[}.$$

Démonstration La première étape consiste à construire une boucle quelconque dont la moyenne est $(1 - \delta)p$ et qui s'insère de façon C^α dans la courbe C . Voici une manière possible de s'y prendre. Prenons deux points q, r proches de p sur la courbe C . Construisons leurs symétriques q', r' et le symétrique du segment $C([q, r])$. On peut choisir q et r suffisamment proches de p pour que ces deux segments symétriques soient dans le même hémisphère ouvert. D'après le **lemme 4**, on peut alors relier r et q' de manière à ce que la courbe passant successivement par q, p, r, q', p , et r' soit de classe C^α et de telle sorte que la longueur de la courbe entre q et q' soit supérieure à $l'c/2$. Il faut toutefois noter que c'est ici qu'intervient de manière cruciale le fait que $n \geq 3$. On construit alors le symétrique de la portion de courbe entre r et q' . On obtient une courbe \tilde{f} qui joint les points p, r, q', p, r', q, p de manière C^α . Voilà notre boucle construite.



Mais notre boucle n'a pas a priori la longueur voulue. On applique donc le **lemme 2** pour rétrécir la courbe : on compose la courbe par la famille de plongements (où U est choisi pour ne pas contenir toute l'image de \tilde{f}), ce qui donne une famille de courbes f_t dont la longueur décroît vers 0 avec t . On a alors pour tout t : $\text{cm}[f_t] = (1 - \delta_t)p$ (par symétrie), où δ_t est une fonction continue de t . De plus, il existe t_0 tel que la longueur de f_{t_0} soit égale à lc . On pose $\bar{\delta} = \min_{0 \leq t \leq t_0} \delta_t$. À présent, si $l \leq (b - a) \leq l'$, et si longueur $[f_{t_1}] = (b - a)c$, on contracte continûment f_{t_1} vers p en conservant sa longueur grâce au **lemme 3**. On peut ainsi demander que $\text{ave}[f] = (1 - \delta)p$ pour tout $\delta \leq \bar{\delta}$. \square

4 Preuve du théorème

4.1 Empêcher la courbure de s'annuler

Lemme Soit $f \in \text{Imm}^{\alpha \geq 2}([a, b], \mathbb{R}^n)$, k sa courbure, $\|f'\| \equiv 1$, et $c > \max[k]$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\tilde{f} \in \text{Imm}^\alpha([a, b], \mathbb{R}^n)$ de courbure $\tilde{k} > 0$ telle que $\|f - \tilde{f}\|_{C^\alpha} \leq \epsilon$ et $\max[\tilde{k}] < c$.

Démonstration Montrons d'abord qu'il existe un ensemble dense de courbes $\tilde{f}_i \in C^\alpha([a, b], \mathbb{R}^n)$ dont la courbure ne s'annule pas. La courbure d'une courbe s'annule si et seulement si ses deux premières dérivées sont linéairement indépendantes. On considère $A \subseteq J^2([a, b], \mathbb{R}^n) = [a, b] \times \mathbb{R}^{3n}$ l'ensemble des éléments de $J^2([a, b], \mathbb{R}^n)$ dont les deux dernières composantes ne sont pas linéairement indépendantes et dont la vitesse est non nulle. Alors :

$$\begin{aligned} f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R} &\rightarrow A \\ (t, y, p, k) &\mapsto (t, y, p, kp) \end{aligned}$$

est une immersion injective propre d'image A , donc A est une variété lisse de dimension $1 + n + n + 1$ (donc $\text{codim } A = n - 1$). Par le théorème de transversalité de Thom, il existe une suite de courbes $(\tilde{f}_i)_{i \in \mathbb{N}} \in (C^\alpha([a, b], \mathbb{R}^n))^{\mathbb{N}}$ convergeant de manière C^α vers f , dont le jet $j^2 \tilde{f}_i$ est transverse à A . Comme $n \geq 3$, $\dim([a, b]) < \text{codim } A$ donc $j^2 \tilde{f}_i$ est disjoint de A . Par conséquent, \tilde{f}_i possède une courbure non nulle, dès que i est assez grand pour que la vitesse de \tilde{f}_i ne s'annule pas. \square

Remarque Si l'ensemble de départ de f est en fait un cercle $\mathbb{R}/(b - a)\mathbb{Z}$, on souhaite de plus que les extrémités de la fonction se recollent, c'est-à-dire que $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b)$ pour tout $k \leq \alpha$. On a traité le cas où la courbure est partout nulle dans l'introduction, on peut donc supposer qu'il existe un point où la courbure est non nulle, qu'on peut supposer égal à a . Soit alors ϕ une fonction lisse sur $[a, b]$ telle que $\phi = 0$ au voisinage de a et de b , et $\phi = 1$ en tout point où la courbure de f s'annule. Alors la fonction $\phi \tilde{f}_i + (1 - \phi)f$ converge toujours vers f et cette fois, le recollement se fait sans problème.

4.2 Fin de la preuve

Soit $\epsilon > 0$. On suppose par le lemme précédent que la courbure de f ne s'annule nulle part et, quitte à reparamétriser, on suppose encore $\|f'\| = 1$. On divise $[a, b]$ en k sous-segments $[a_{i-1}, a_i]$ où $a_0 = a$ et $a_k = b$. On pose $T = f'$, on note $T_i = T|_{[a_{i-1}, a_i]}$, et on suppose que $c(a_i - a_{i-1}) \leq \epsilon$ et longueur $[T_i] \leq \epsilon$. On applique maintenant le théorème-clé à chaque T_i , ce qui fournit des fonctions \tilde{T}_i de vitesse constante c . On définit alors \tilde{T} comme étant égal à \tilde{T}_i sur chaque $[a_i, a_{i+1}]$. Alors, $\tilde{T} \in \text{Imm}^{\alpha-1}([a, b], \mathbb{S}^{n-1})$, $\|\tilde{T}'\| = c$, $\|T - \tilde{T}\| \leq 2\epsilon$ (par les accroissements finis), $\tilde{T}(a_i) = T(a_i)$, et $\int_{a_{i-1}}^{a_i} \tilde{T}(t) dt = \int_{a_{i-1}}^{a_i} T(t) dt$. On pose maintenant :

$$\tilde{f}(t) := f(a) + \int_a^t \tilde{T}(u) du.$$

La fonction \tilde{f} ainsi obtenue convient. \square

5 Le théorème de transversalité de Thom

Définition Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, V une sous-variété de E , W une sous-variété de F et g une application de classe C^∞ de V dans F . Soit a un point de V .

- On dit que g est transverse à W en a si, ou bien $g(a)$ n'appartient pas à W , ou bien $g(a)$ appartient à W et l'image de $T_a g$ est transverse au sous-espace $T_{g(a)} W$, c'est-à-dire : $\text{Im } T_a g + T_{g(a)} W = F$.
- On dit que g est transverse à W si elle l'est en chaque point de V .

Définition Soient $n, r \in \mathbb{N}$ et U un ouvert de \mathbb{R} . On définit l'espace des jets d'ordre r de U dans \mathbb{R}^n : $J^r(U, \mathbb{R}^n) = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^{r+1}$. On définit alors pour tout $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ le jet $j^r f : U \rightarrow J^r(U, \mathbb{R}^n)$ tel que $j^r f(a) = (a, f(a), f'(a), \dots, f^r(a))$.

Théorème Soient $n, r \in \mathbb{N}$ et U un ouvert de \mathbb{R} . Soit W une sous-variété de $J^r(U, \mathbb{R}^n)$. Alors l'ensemble des fonctions $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ telles que $j^r f$ soit transverse à W est dense dans $C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$.

Le théorème s'applique en réalité au cas où U est un ouvert de \mathbb{R}^p , mais on ne se sert dans l'article que de cette version avec $p = 1$. La démonstration s'appuie sur le théorème de Sard, et le généralise.

6 Références

Ajouts personnels Le lemme de recollement C^α et le paragraphe sur la convexité sont personnels. J'ai aussi dû modifier la preuve du lemme 5 car, dans la solution proposée dans [1], je ne comprenais pas comment faire en sorte que $\bar{\delta}$ ne dépende pas de a et de b , et de plus, je n'avais qu'une version faible du lemme de recollement (voir la remarque en dessous de ce lemme). Tout ce qui se trouve dans la partie **Fin de la preuve** est largement simplifié par rapport à [1] car l'article prouve un théorème légèrement plus fort.

Ajouts personnels dans l'annexe : Théorème de continuité des coordonnées barycentriques (inspiré de [2]) La dernière ligne du théorème a été ajoutée par moi (c'est-à-dire, la stricte positivité pour les point dans l'intérieur), ainsi que toutes les mentions de $\omega(x)$ dans les preuves. Les lemmes 1, 2, 3 et 5 sont calqués sur ceux de l'article, tandis que le lemme 4 et le lemme 6 ne sont pas dans l'article.

Dans [1], le problème de la stricte positivité est réglé en deux lignes que je n'ai pas réussi à comprendre, c'est pourquoi je suis obligé de modifier le théorème de [2] et sa preuve.

Bibliographie

- [1] Mohammad Ghomi. *h-principles for curves and knots of constant curvature*. Geom. Dedicata 127, 19-35, 2007.
- [2] J. A. Kalman. *Continuity and convexity of projections and barycentric coordinates in convex polyhedra*. Pacific J. Math., 11 :1017-1022, 1961.
- [3] Michel Demazure. *Catastrophes et bifurcations*. Ellipses, 99-107, 1989.

Annexe : Détermination continue des coefficients barycentriques dans l'intérieur d'un polyèdre convexe

Le théorème suivant est utilisé dans la démonstration du théorème-clé.

Théorème Soit S un polyèdre convexe de \mathbb{R}^n de sommets s_0, \dots, s_m . Alors il existe des fonctions continues $\lambda_i : S \rightarrow [0, 1]$ telles que pour tout $x \in S$:

$$x = \sum_{i=0}^m \lambda_i(x) s_i,$$

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i(x) = 1.$$

De plus, on peut demander que $\lambda_i(x) > 0$ pour tout $x \in \text{int } S$.

Définitions

- Soient s_0 et s deux points distincts de \mathbb{R}^n . On définit s_0s comme étant la demi-droite ouverte constituée de tous les points $s_0 + \lambda(s - s_0)$ où $\lambda > 0$.
- Soit $s_0 \in \mathbb{R}^n$ et $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble compact tel que $s_0 \notin S$. On définit le cône $C(s_0)$ comme l'union des demi-droites s_0s où s parcourt S .
- Si $x \in C(s_0)$, on définit deux "projections" de x sur S :
 - $\pi(x)$ comme le point de $s_0x \cap S$ le plus proche de s_0 ,
 - $\omega(x)$ comme le point de $s_0x \cap S$ le plus éloigné de s_0 .
- Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$. On note $H(A)$ l'enveloppe convexe de A et $L(A)$ le sous-espace affine de \mathbb{R}^n engendré par A .

Remarque Une grande partie de la preuve s'appuie sur le fait que $\pi(x)$ et $\omega(x)$ sont continues si S est un polyèdre convexe (**lemme 3**). Ce résultat est faux si l'on suppose seulement que S est un compact convexe ou si l'on suppose seulement que S est un polyèdre, voir [2] pour plus de détails.

6.1 Lemme 1

Soit $s_0 \in \mathbb{R}^n$, soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un compact convexe de \mathbb{R}^n tel que $s_0 \notin S$, et soient π et ω les projections associées à $C(s_0, S)$. On suppose que $x, s_1, \dots, s_p \in S$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in]0, 1]$ ($p \geq 2$) sont tels que $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i s_i$, $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$, et $\pi(x) = x$ (resp. $\omega(x) = x$). Alors :

1. $\pi(y) = y$ (resp. $\omega(y) = y$) pour tout $y \in H(s_1, \dots, s_p)$,
2. $s_0 \notin L(s_1, \dots, s_p)$.

Démonstration

1. Soit $y \in H(s_1, \dots, s_p)$. On peut trouver des entiers strictement positifs tels que $y = \sum_{i=1}^p \mu_i s_i$ et $\sum_{i=1}^p \mu_i = 1$. Comme $\lambda_i > 0$, il existe $0 < \alpha < 1$ tel que pour tout i , $\lambda_i - \alpha \mu_i > 0$. On pose :

$$z = (x - \alpha y) / (1 - \alpha) = \sum_{i=1}^p \left(\frac{\lambda_i - \alpha \mu_i}{1 - \alpha} \right) s_i.$$

Alors $z \in S$ et $x = \alpha y + (1 - \alpha)z$.

Supposons par l'absurde que $\pi(y) \neq y$. Alors il existe $0 < \beta < 1$ tel que $\pi(y) = (1 - \beta)s_0 + \beta y$.

On pose :

$$x' := \frac{\alpha(1 - \beta)s_0 + \beta x}{\alpha(1 - \beta) + \beta} = \frac{\alpha\pi(y) + \beta(1 - \alpha)z}{\alpha + \beta(1 - \alpha)}.$$

Mais alors, $x' \in s_0x \cap S$ et $\|s_0 - x'\| < \|s_0 - x\|$, ce qui contredit le fait que $\pi(x) = x$.

Respectivement : supposons par l'absurde que $\omega(y) \neq y$. Alors il existe $\beta > 1$ tel que $\omega(y) = (1 - \beta)s_0 + \beta y$. On pose :

$$x' := \frac{\alpha(1 - \beta)s_0 + \beta x}{\alpha(1 - \beta) + \beta} = \frac{\alpha\pi(y) + \beta(1 - \alpha)z}{\alpha + \beta(1 - \alpha)}.$$

Mais alors, $x' \in s_0x \cap S$ et $\|s_0 - x'\| > \|s_0 - x\|$, ce qui contredit le fait que $\omega(x) = x$.

2. On suppose que $s_0 \in L(s_1, \dots, s_p)$. Si l'on restreint l'espace ambiant à $L(s_1, \dots, s_p)$, alors $x \in \text{int } S$, ce qui empêche d'avoir $\pi(x) = x$ ou $\omega(x) = x$.

Définition Soient s_0, S, π et ω comme dans le lemme 1. On dit que $A \subseteq S$ est π -admissible (resp. ω -admissible) si $\pi(x) = x$ (resp. $\omega(x) = x$) pour tout $x \in H(A)$.

6.2 Lemme 2

Soient s_0, S, π et ω comme dans le lemme 1, soit A un sous-ensemble fini π -admissible (resp. ω -admissible) de S , et soit π' (resp. ω') la projection de $C(s_0, H(A))$ sur $H(A)$. Alors :

1. $\pi(x) = \pi'(x)$ (resp. $\omega(x) = \omega'(x)$) pour tout $x \in C(s_0, H(A))$ et :
2. π' est une fonction continue de $C(s_0, H(A))$ dans $H(A)$.

Démonstration

1. Soit $x \in C(s_0, H(A))$. Alors $\pi(\pi'(x)) = \pi'(x)$ car A est π -admissible, or $s_0\pi'(x) = s_0x$ donc $\pi(\pi'(x)) = \pi(x)$. De même pour ω .
2. Soit $A = \{s_1, \dots, s_p\}$ et $x_0 = \sum_{i=1}^p (1/p)s_i$. Alors $\pi(x_0) = x_0$ (resp. $\omega(x_0) = x_0$), donc $s_0 \notin L(A)$ d'après le lemme 1. Par conséquent, pour tout $x \in C(s_0, H(A))$, $s_0x \cap H(A) = \{x\}$, car si cet ensemble contenait un autre point, $L(A)$ contiendrait s_0 . Ainsi, $\pi' = \omega'$. On nomme s_* le point de $L(A)$ le plus proche de s_0 , et x un point quelconque de $C(s_0, H(A))$. Alors :

$$\pi'(x) = \omega'(x) = \frac{x - \lambda(x)s_0}{1 - \lambda(x)}$$

où $\lambda(x) = \frac{\langle x - s_*, s_0 - s_* \rangle}{\|s_0 - s_*\|^2}$ (on vérifie avec un rapide calcul que ce point appartient bien à $H(A)$) d'où la continuité.

6.3 Lemme 3

Soient $s_0, \dots, s_m \in \mathbb{R}^n$ tels que $s_0 \notin H(s_1, \dots, s_m) = S$, et soient π et ω les projections de $C(s_0, S)$ sur S . Alors, π et une application continue de $C(s_0)$ dans S .

Démonstration Soient A_1, \dots, A_q les sous-ensembles de $\{s_1, \dots, s_m\}$ qui sont π -admissibles (resp. ω -admissibles). Alors tout $x \in C(s_0, S)$ appartient à au moins un $C(s_0, H(A_j))$. En effet, si $x \in C(s_0, S)$, il existe des entiers positifs $x(1), \dots, x(p)$ et des réels strictement positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que $\pi(x)$ (resp. $\omega(x)$) = $\sum_{i=1}^p \lambda_i s_{x(i)}$ et $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$, et alors $A = \{s_{x(1)}, \dots, s_{x(p)}\}$ est admissible par le lemme 1, et $x \in C(s_0, H(A))$. Pour tout $j \leq q$ on note π_j et ω_j les projections de $C(s_0, H(A_j))$ sur $H(A_j)$.

Pour prouver le théorème, il suffit de montrer que, si $x, x_1, x_2, \dots \in C(s_0, S)$ sont tels que $x = \lim_k x_k$, alors $\pi(x) = \lim_k \pi(x_k)$ (resp. $\omega(x) = \lim_k \omega(x_k)$). Soit J l'ensemble de tous les j tels que $x_k \in C(s_0, H(A_j))$ pour une infinité de valeurs de k , et pour tout $j \in J$, soient $j(1) < j(2) < \dots$ les valeurs de k telles que $x_k \in C(s_0, H(A_j))$. Alors, pour chaque $j \in J$, $x \in C(s_0, H(A_j))$ par passage à la limite, et donc par le lemme 2, $\pi(x) = \pi_j(x) = \lim_l \pi_j(x_{j(l)}) = \lim_l \pi(x_{j(l)})$ (resp. $\omega(x) = \omega_j(x) = \lim_l \omega_j(x_{j(l)}) = \lim_l \omega(x_{j(l)})$), ce qui conclut.

Définitions Soit $s_0 \in \mathbb{R}^n$, soit S un polyèdre convexe tel que $s_0 \notin S$. On note $D(s_0, S) := H(S \cup s_0)$. On définit la fonction $M : D(s_0, S) \setminus \{s_0\} \rightarrow S$ par :

$$M(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi(x) + \omega(x)) & \text{si } x \notin S \\ \frac{1}{2}(x + \omega(x))g & \text{si } t \in [a', b'] \end{cases}$$

On définit la fonction $\lambda_0 : H(S \cup s_0) \rightarrow [0, 1]$ associée à S et s_0 par :

- $\lambda_0(s_0) = 1$;
- Si $x \neq s_0$ on définit λ_0 par l'égalité $x = \lambda_0(x)s_0 + (1 - \lambda_0(x))(M(x))$.

6.4 Lemme 4

La fonction M définie ci-dessus est continue sur $D(s_1, S) \setminus \{s_0\}$.

Démonstration Soit $(x_k) \in (D(s_0, S))^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers x . Montrons qu'alors $M(x_k) \rightarrow M(x)$. Comme $M(x)$ est continue sur S (fermé) et sur $D(s_0, S) \setminus S$, on peut supposer après extraction que $(x_k) \in (D(s_0, S) \setminus S)^{\mathbb{N}}$ et $x \in S$. Mais alors :

$$(\forall k) \langle \pi(x_k) - x_k | s_0 - x_k \rangle < 0$$

donc

$$\langle \pi(x) - x | s_0 - x \rangle \leq 0$$

et de plus, comme $x \in S$, on a :

$$\langle \pi(x) - x | s_0 - x \rangle \geq 0$$

d'où finalement :

$$\langle \pi(x) - x | s_0 - x \rangle = 0$$

Donc $\pi(x) = x$. Ainsi $\pi(x_k) \rightarrow \pi(x) = x$ donc $M(x_k) \rightarrow M(x)$ en regardant la définition de M .

6.5 Lemme 5

La fonction λ_0 définie ci-dessus est continue sur $D(s_0, S)$.

Démonstration La continuité sur $D(s_1, S) \setminus \{s_0\}$ est donnée par la formule : $\lambda_0(x) = 1 - \frac{\|x - s_0\|}{\|M(x) - s_0\|}$. Pour la continuité en s_0 , soit $0 < \epsilon < 1$, et $\delta = L\epsilon$ où $L > 0$ est la distance de s_0 à S . Alors, si $x \in D(s_0, S)$ et $0 < \|x - s_0\| < \delta$, on a $x \neq s_0, x \notin S$, et :

$$L \leq \|M(x) - s_0\| = \frac{\|x - s_0\|}{1 - \lambda_0(x)} < \frac{L\epsilon}{1 - \lambda_0(x)},$$

d'où $0 < 1 - \lambda_0 < \epsilon$, ce qui prouve la continuité en s_0 .

6.6 Lemme 6

Soit $s_0 \in \mathbb{R}^n$, soit S un polyèdre convexe de sommets s_1, \dots, s_p tel que $s_0 \notin S$.

1. Si $x \in \text{rel int conv}[s_0, \dots, s_p]$ alors $M(x) \in \text{rel int } S = \text{rel int conv}[s_1, \dots, s_p]$.
2. Dans ce cas, $\lambda_0(x) > 0$.

Démonstration

1. Quitte à restreindre l'espace ambiant, on peut supposer $\text{int}[s_0, \dots, s_p]$ non vide. Soit H un hyperplan passant par $M(x)$, ne contenant pas S entier.
 - Si H contient s_0 alors il contient x , or $x \in \text{rel int conv}[s_0, \dots, s_p]$, donc il existe deux points parmi s_1, \dots, s_p de part et d'autre de H , ce qui prouve bien $M(x) \in \text{rel int conv}[s_1, \dots, s_p]$.
 - Si H ne contient ni s_0 ni $\omega(x)$, alors ces deux points sont de part et d'autre de l'hyperplan car $s_0, M(x)$ et $\omega(x)$ sont alignés dans cet ordre.
 - Si H contient $\omega(x)$, mais pas s_0 , sachant que ces deux points sont alignés avec $M(x)$, on a nécessairement $M(x) = \omega(x)$. Comme de plus $x \in \text{rel int}[D(s_0, S)]$, on a $x \neq \omega(x)$. Par conséquent, en regardant l'expression de M , on obtient : $\pi(x) = \omega(x)$, c'est-à-dire : $s_0x \cap S = \{\pi(x)\}$. On va maintenant montrer par l'absurde que $\text{int } S = \emptyset$. On suppose le contraire : soit q un point de l'intérieur de S et P un plan affine passant par $x, \pi(x)$ et q . Alors $S' := S \cap P$ est un polygone d'intérieur non vide dans P , on nomme ses sommets $s'_1, \dots, s'_{p'}$. De plus $x \in \text{rel int conv}[s_0, s'_1, \dots, s'_{p'}]$, donc il existe un point r parmi $s'_1, \dots, s'_{p'}$ tel que q et r sont de part et d'autre de s_0x . Mais alors, $D(r, P) \subseteq S$ intersecte s_0x en une infinité de points, ce contredit l'hypothèse. Par conséquent $\text{int } S = \emptyset$. On considère maintenant $H' = H \cap L(S)$: par hypothèse, c'est un hyperplan de $L(S)$, donc $L(H \cup \{x\})$ est un hyperplan de $L(S \cup \{s_0\})$ qui de plus contient s_0 . Or $x \in \text{rel int conv}[D(s_0, S)]$, donc il existe deux points de S de part et d'autre de cet hyperplan, ce qui conclut.
2. Le seul cas où $\lambda_0(x) = 0$ est le cas où $x = \omega(x)$, ce qui est impossible si $x \in \text{rel int}[D(s_0, S)]$.

Démonstration du théorème On procède par récurrence sur m . Le cas $m = 0$ est trivial. On suppose maintenant $m \geq 1$. Soit $T = H(s_1, \dots, s_m)$. Comme s_0 est un sommet de S , $s_0 \notin T$. Par hypothèse de récurrence, il existe des fonctions continues $\mu_i : T \rightarrow [0, 1]$ telles que pour tout $x \in T$, $\sum_{i=1}^m \mu_i(x)s_i = x$, $\sum_{i=1}^m \mu_i(x) = 1$, et de plus, pour tout $x \in \text{int } T$, $\lambda_i(x) > 0$. Soit λ_0 associé à T et à s_0 . Pour tout $x \in S$, on pose $\lambda_i(x) = \mu_i(M(x))(1 - \lambda_0(x))$. Les λ_i ($0 \leq i \leq m$) vérifient toutes les conditions voulues (en particulier, le lemme 6 garantit que pour tout $x \in \text{int } S$, $\lambda_i(x) > 0$).