

Etude d'un retournement de la sphère

Francesca Porciello

17 juin 2015

Table des matières

1	Le Théorème de Whitney-Graustein	3
2	Le retournement de Chéritat	7
2.1	Un mouvement clef	7
2.2	Première étape	7
2.3	Deuxième étape	10
2.4	Troisième étape	11
3	Etude du retournement	13
3.1	Immersions préservant la hauteur	14
3.2	Les étapes 1 et 3	15
	Annexe	18
	Bibliographie	28

Introduction

A la fin des années 50, Stephen Smale surprend la communauté mathématique en démontrant que l'on peut retourner une sphère. Informellement cela signifie que l'on peut déformer continûment la sphère S^2 de \mathbb{R}^3 , sans créer de plis ni de pointe, de façon à échanger la face intérieure et la face extérieure. Si la première est colorée en orange et la seconde en vert, à la fin de l'opération la sphère regardée depuis l'extérieur (la composante non bornée du complémentaire) apparaîtra en orange.

La démonstration de Smale [6], certes constructive, n'était pas adaptée à une visualisation. Celle-ci occupera un certain nombre de mathématiciens pendant de longues années. Les premiers dessins sont dus à Phillips [5] et sont apparus dans un numéro du Scientific America en 1966, puis s'en sont suivis les modèles 3D en grillage à poule de Pugh, le film de Nelson [4], les dessins de Morin et Petit [3], le film de Thurston [2], celui du projet optiverse, etc. Le lecteur intéressé trouvera un compte rendu détaillé de l'histoire du retournement de la sphère ici [7].

Il n'y a pas une façon unique de retourner la sphère et les retournements inventés depuis les années 60 sont fondés sur des idées assez différentes : recouvrement de la surface de Boy, minimisation de l'énergie de Willmore, théorie des corrugations, propriété de la surface de Morin. Ces idées, toutes lumineuses, sont assez délicates à mettre en oeuvre et dans la pratique les retournements proposés restent difficiles à appréhender.

Très récemment, Arnaud Chéritat a proposé une nouvelle façon de retourner la sphère [1], fondée sur une déformation des latitudes et un glissement d'un tube au dessus des pôles. Le but de ce mémoire est de décrire en détail le retournement d'Arnaud Chéritat.

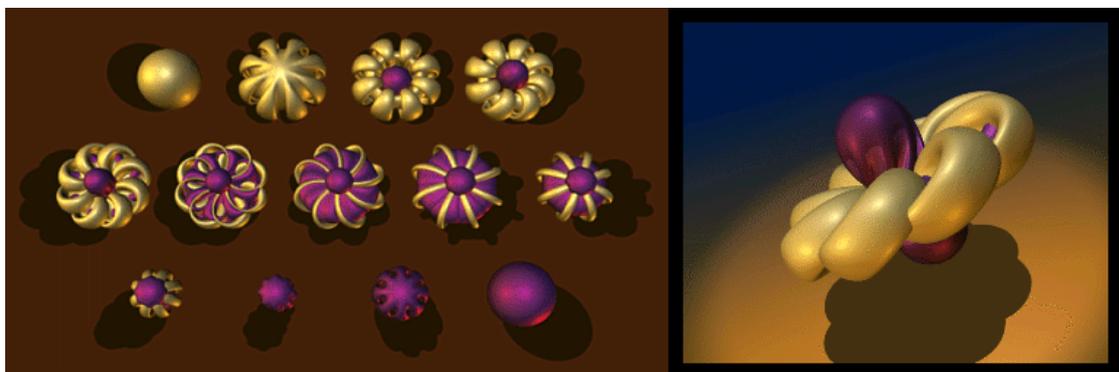


FIGURE 1 – Images du retournement de Thurston.

Chapitre 1

Le Théorème de Whitney-Graustein

Ce chapitre est préparatoire à la description du retournement d'Arnaud Chéritat. On y étudie les homotopies régulières de lacet dans le plan. On introduit l'indice de rotation et on démontre que si l'on peut passer d'une courbe fermée à une autre à travers un chemin continu dans l'espace des immersions de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^2 , alors cet indice doit être préservé [8]. On en déduit qu'il est impossible de retourner le cercle, puisque son indice de rotation vaut 1 ou -1 selon l'orientation.

Définition 1.1. Le **nombre d'enroulements** autour de l'origine d'une courbe continue

$$\gamma : \begin{cases} [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ t \mapsto R(t)e^{i\theta(t)} \end{cases}$$

est le nombre

$$W(\gamma, 0) := \frac{1}{2\pi}[\theta(b) - \theta(a)].$$

On remarque que si γ est une courbe fermée alors $W(\gamma, 0) \in \mathbb{Z}$.

Définition 1.2. L'**indice de rotation** l'un lacet C^1 régulier $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est le nombre entier

$$I(\gamma) := W(\gamma', 0).$$

Cette constante calcule le nombre de rotations autour de 0 faites par le vecteur $\gamma'(t)$, où chaque rotation horaire est comptée avec un signe négatif et chaque rotation antihoraire est comptée avec un signe positif.

On note I l'espace des lacets réguliers C^1 à support dans \mathbb{R}^2 , qui est identifié avec l'espace des immersions C^1

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{S}^1 = \{e^{i2\pi s} | s \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \\ s \mapsto R(s)e^{i\theta(s)} \end{cases} .$$

Définition 1.3. On dit que deux immersions $\gamma_0, \gamma_1 \in I$ sont dans la même classe d'homotopie régulière s'il existe une application

$$H : \begin{cases} \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^2 \\ (s, t) \mapsto \gamma_t(s) \end{cases}$$

telle que $\gamma_t \in I$ pour tout $t \in [0, 1]$. Une telle application est appelée une **homotopie régulière** entre les lacets γ_0 et γ_1 .

Si l'on muni I de la topologie héritée de l'espace des fonctions $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 , une homotopie régulière $H(s, t) = \gamma_t(s)$ correspond à un chemin continu

$$\begin{cases} [0, 1] \rightarrow I \\ t \mapsto \gamma_t \end{cases}$$

et les classes d'homotopie régulière coïncident avec les composantes connexes par arcs de l'espace I .

Un **retournement du cercle** est une homotopie régulière entre le plongement canonique

$$Id_{\mathbb{S}^1} : \begin{cases} \mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \\ s \mapsto e^{i2\pi s} \end{cases}$$

et la réflexion

$$r : \begin{cases} \mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \\ s \mapsto \overline{e^{i2\pi s}} = e^{-i2\pi s} \end{cases}$$

dont le support est effectivement un cercle d'orientation renversée.

On veut montrer que I a une infinité de composantes connexes par arcs, classifiées par un seul invariant qui est l'indice de rotation. Ceci implique qu'il est impossible de réaliser le retournement du cercle dans \mathbb{R}^2 , car les indices de rotation de $Id_{\mathbb{S}^1}$ et r sont 1 et -1 respectivement. On a finalement répondu à notre question.

Théorème 1.1 (Whitney-Graustein). *Deux lacets sont régulièrement homotopes si et seulement s'ils ont le même indice de rotation.*

Démonstration. Soient $\gamma_0, \gamma_1 \in I$.

Supposons que γ_0 et γ_1 soient régulièrement homotopes. Pour chaque $t \in [0, 1]$ on note n_t l'indice de rotation de $\gamma_t \in I$. L'application $[0, 1] \ni t \mapsto n_t$ est clairement continue et à valeurs dans \mathbb{Z} , donc elle est constante, ce qui implique que $I(\gamma_0) = I(\gamma_1)$.

Réciproquement, supposons que $I(\gamma_0) = I(\gamma_1) = n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (en effet, notre intérêt ici se limite au cas $n \in \{-1, 1\}$). En paramétrant \mathbb{S}^1 par

$$[0, 1] \ni s \mapsto e^{i2\pi s},$$

on regarde γ_0 et γ_1 comme applications de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} . On peut supposer que les deux lacets soient paramétrés par la longueur d'arc et basés en 0. Ainsi, $\gamma_0'(s) = Le^{i\theta_0(s)}$ et $\gamma_1'(s) = Le^{i\theta_1(s)}$ avec

$$\begin{cases} \theta_0(0) = \theta_1(0) = 0 \\ \theta_0(1) = \theta_1(1) = 2\pi n \end{cases}.$$

Pour tout $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$ on pose

$$\theta_t(s) := (1 - t)\theta_0(s) + t\theta_1(s)$$

1. C'est un espace de Banach pour la norme $\max(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty)$.

qui induit naturellement une homotopie entre γ_0 et γ_1

$$\tilde{\gamma}_t(s) := L \int_0^s e^{i\theta_t(u)} du.$$

Néanmoins, les courbes $\tilde{\gamma}_t$ pour $t \neq 0, 1$ peuvent ne pas se refermer en 0. On corrige alors notre homotopie en posant

$$\gamma_t(s) := \tilde{\gamma}_t(s) - s\tilde{\gamma}_t(1).$$

Ainsi, γ_t est un lacet basé en 0 pour tout $t \in [0, 1]$, car $\gamma_t(0) = \gamma_t(1) = 0$ et

$$\gamma'_t(0) = L - \tilde{\gamma}_t(1) = \gamma'_t(1).$$

Il reste à vérifier que $\gamma'_t(s) \neq 0$ pour tout $s \in [0, 1]$. On a

$$\gamma'_t(s) = Le^{i\theta_t(s)} - L \int_0^1 e^{i\theta_t(u)} du.$$

Or, $|e^{i\theta_t(s)}| = 1$ et

$$\left| \int_0^1 e^{i\theta_t(u)} du \right| \leq \int_0^1 |e^{i\theta_t(u)}| du = 1$$

et la fonction $u \mapsto e^{i\theta_t(u)}$ est non constante, donc $|\int_0^1 e^{i\theta_t(u)} du| < 1$.

Conclusion : l'application $H(s, t) = \gamma_t(s)$ est une homotopie régulière entre γ_0 et γ_1 . \square

Un argument similaire permet de démontrer un autre résultat, qui nous servira pour construire le retournement de la sphère qui fait l'objet de ce document. Choisissons un point base sur \mathbb{S}^1 . Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, notons I_n l'ensemble des immersions $\gamma \in I$ d'indice de rotation n telles que γ' pointe horizontalement à droite du point base. En d'autres termes, I_n peut être vu comme l'ensemble des immersions γ telles que $I(\gamma) = n$ et, en paramétrant \mathbb{S}^1 par $[0, 1]$ comme dans la preuve du théorème, $\gamma'(0) > 0$.

Lemme 1.1. *Si $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, I_n se rétracte par déformation sur chacun de ses points.*

Démonstration. Soit $\delta \in I_n$. On peut supposer, quitte à composer avec une similitude, que $\delta'(0) = 1$ et $\delta(0) = 0$. Montrons d'abord que l'espace

$$I'_n = \{\gamma \in I_n \mid \gamma(0) = 0, \gamma'(0) = 1\}$$

se rétracte par déformation sur δ . Il faut, pour cela, construire une homotopie

$$H : I'_n \times [0, 1] \rightarrow I'_n$$

telle que $H(\gamma, 0) = \gamma$, $H(\gamma, 1) = \delta$ pour tout $\gamma \in I'_n$ et $H(\delta, t) = \delta$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Le vecteur tangent d'un lacet $\gamma \in I'_n$ s'écrit sous la forme $\gamma'(s) = e^{x(s)+i\theta(s)}$, avec $\theta(0) = x(0) = 0$. On peut donc exprimer le logarithme de γ' par une fonction

$$l_\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$$

avec $l_\gamma(0) = 0$. Dit autrement, $l_\gamma(s)$ est l'unique nombre complexe tel que $e^{l_\gamma(s)} = \gamma'(s)$.

Commençons par définir une homotopie \tilde{H} de sorte que $\tilde{H}(\gamma, t) = \tilde{\gamma}_t$ soit l'unique courbe telle que

$$\begin{cases} \tilde{\gamma}'_t(s) = e^{(1-t)l_\gamma(s)+tl_\delta(s)} \\ \tilde{\gamma}_t(0) = 0. \end{cases}$$

Comme dans la preuve précédente, on remarque que les courbes $\tilde{\gamma}_t$, pour $t \neq 0, 1$, peuvent ne pas se refermer en 0. On corrige alors l'homotopie en définant γ_t comme étant l'unique courbe telle que

$$\begin{cases} \gamma'_t(s) = \tilde{\gamma}'_t(s) - \frac{\int_0^1 \tilde{\gamma}'_t(u) du}{\int_0^1 |\tilde{\gamma}'_t(u)| du} |\tilde{\gamma}'_t(s)| \\ \gamma_t(0) = 0. \end{cases}$$

On vérifie alors que l'application $H(\gamma, t) = \gamma_t$ est une rétraction par déformation de I'_n sur δ .

Enfin, une rétraction par déformation de I_n sur I'_n est donnée par

$$\gamma_t := e^{-t \log \gamma'(0)} (\gamma - t\gamma(0))$$

pour $(\gamma, t) \in I_n \times [0, 1]$. □

Pour conclure, on donne ici des résultats concernant les courbes plongées dans \mathbb{R}^2 , qui sont bien connus et qui seront utilisés dans la suite.

Dans les énoncés qui suivent, \mathcal{P} désigne l'espace des plongements C^1 de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^2 . On note en outre $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ l'espace des C^1 -difféomorphismes $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de φ et de ses dérivées.

Proposition 1.1 (Théorème de Jordan-Schoenflies). *Pour tout $\gamma \in \mathcal{P}$ il existe $\varphi \in \text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ préservant l'orientation tel que $\varphi \circ \gamma$ est un cercle euclidien. Si $I(\gamma) = 1$, le difféomorphisme peut être choisi de sorte que $\varphi \circ \gamma$ soit le plongement canonique $Id_{\mathbb{S}^1}$.*

La deuxième assertion du résultat suivant est une conséquence du Théorème 1.1.

Lemme 1.2. *Pour tout $\varphi \in \text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ préservant l'orientation il existe un chemin continu $\alpha : [0, 1] \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ tel que $\alpha(0) = \varphi$ et $\alpha(1) = Id$. En particulier, pour tout $\gamma \in I$ on a $I(\gamma) = I(\varphi \circ \gamma)$.*

Enfin, en utilisant la Proposition 1.1 et le Lemme 1.2 on prouve le résultat suivant.

Lemme 1.3. *Pour tout $\gamma \in \mathcal{P}$, $I(\gamma) \in \{-1, 1\}$.*

Chapitre 2

Le retournement de Chéritat

Dans ce chapitre on donne une description informelle du retournement de la sphère proposé dans [1].

2.1 Un mouvement clef

Le retournement de la sphère proposé par Arnaud Chéritat est construit à partir d'homotopies régulières du cercle dans le plan. Un mouvement important dans cette construction, décrit dans ce paragraphe, est la création ou l'annulation d'une paire de boucles.

Plus précisément, il s'agit de transformer un segment en une courbe ayant deux boucles opposées, les extrémités et leurs tangentes restant fixes.

La solution est loin d'être unique, celle décrite par Arnaud Chéritat est représentée dans la figure 2.1 (a).

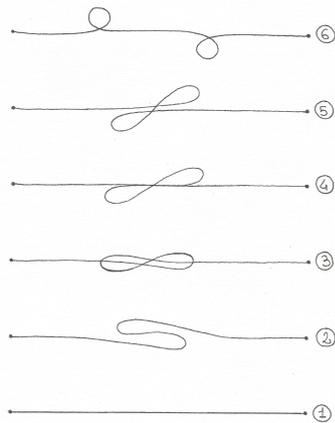
Il s'agit d'un chemin continu dans l'espace des immersions $I([a, b]; \mathbb{R}^2)$ d'un intervalle $[a, b]$ dans \mathbb{R}^2 . La surface engendrée par ce mouvement est représentée dans la figure 2.1 (b).

2.2 Première étape

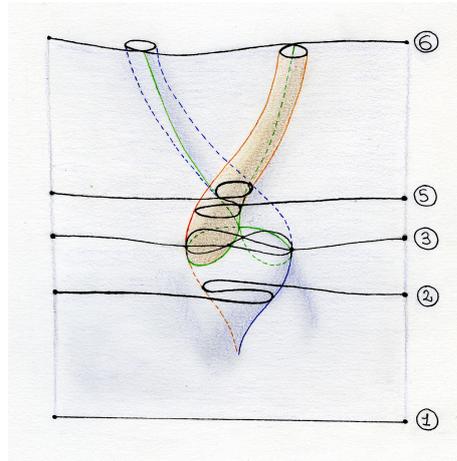
Partons d'une sphère S , verte à l'extérieur et orange à l'intérieur. Nous allons décrire ici une première déformation qui transforme S en une surface intermédiaire, où l'on verra apparaître des parties oranges à l'extérieur.

Coupons notre sphère le long d'un plan horizontal, $\{z = h_1\}$, à proximité du pôle sud. Au lieu de décrire de façon directe la déformation de la sphère, nous allons réaliser une homotopie régulière du cercle $S \cap \{z = h_1\}$. Cette homotopie débute avec la création d'une paire de boucles d'indice opposé, réalisée à travers le mouvement décrit dans le paragraphe 2.1. L'une des boucles migre ensuite le long du cercle jusqu'à une position symétrique par rapport à l'axe nord-sud. Enfin, les deux boucles se rejoignent et disparaissent.

La figure 2.2 est une illustration de la séquence que l'on vient de décrire, où le cercle de départ, correspondant à la hauteur h_1 , porte le numéro 1. Il s'agit d'une homotopie régulière de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^2 , qui se lit de bas en haut.



(a) Formation d'une paire de boucles sur un segment.



(b) Surface engendrée.

FIGURE 2.1 – Le mouvement clef et sa trace dans l'espace. L'image (b) est reproduite à la fin du document (Annexe), où l'on donne aussi des autres illustrations de la surface engendrée par le mouvement clef.

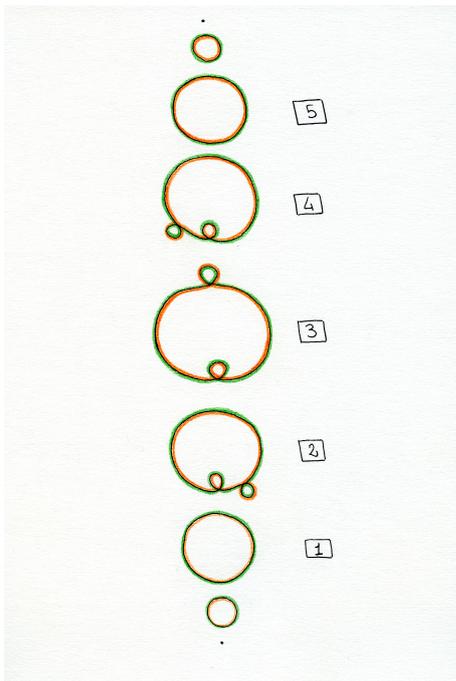


FIGURE 2.2 – Séquence 1.

Considérons maintenant la surface, qu'on appellera S_1 , qui est la trace dans l'espace de cette homotopie. Cela veut dire que si l'on coupe S_1 en sections horizontales, on retrouve aux hauteurs h_i la séquence illustrée dans la figure 2.2 : pour tout i , l'intersection $S_1 \cap \{z = h_i\}$ est la courbe \boxed{i} . Quelle est la forme de cette surface ? A proximité du pôle sud, c'est une calotte sphérique. En s'éloignant du pôle sud, on voit apparaître deux tubes, engendrés par le mouvement des deux boucles : un tube externe (orange) et un tube interne (vert). Le tube externe se fusionne avec le tube interne après s'être enroulé autour de la sphère. Au delà d'une certaine altitude, plus rien ne se passe, et la calotte nord de S_1 est identique à celle de S .

La figure 2.3 est une illustration de cette surface.

Pour tout i , notons C_i le cercle $S \cap \{z = h_i\}$. Il est clair que l'on peut déformer C_i en la courbe \boxed{i} , ayant le même indice de rotation (voir figure

2.4). Les traces de ces déformations dans l'espace décrivent une façon de passer de S à S_1 .

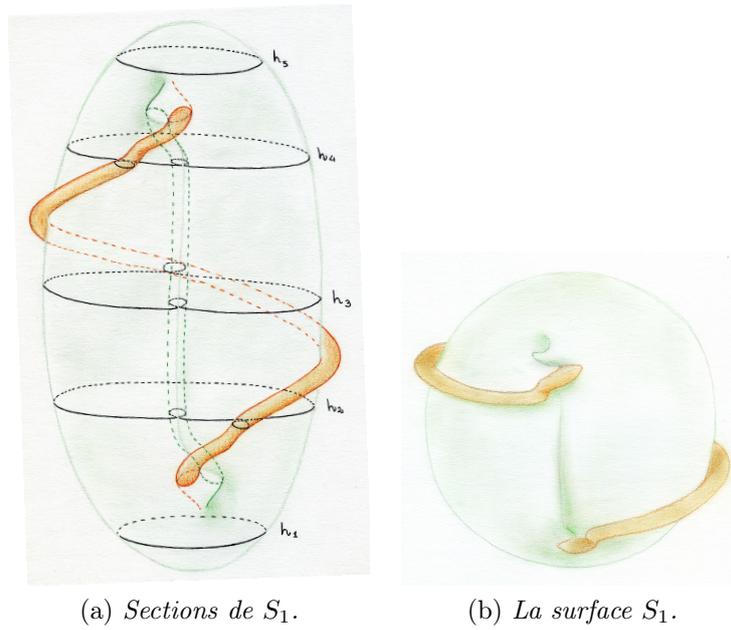


FIGURE 2.3 – Représentations de la surface S_1 . Ces images sont reproduites en grand format à la fin du document.

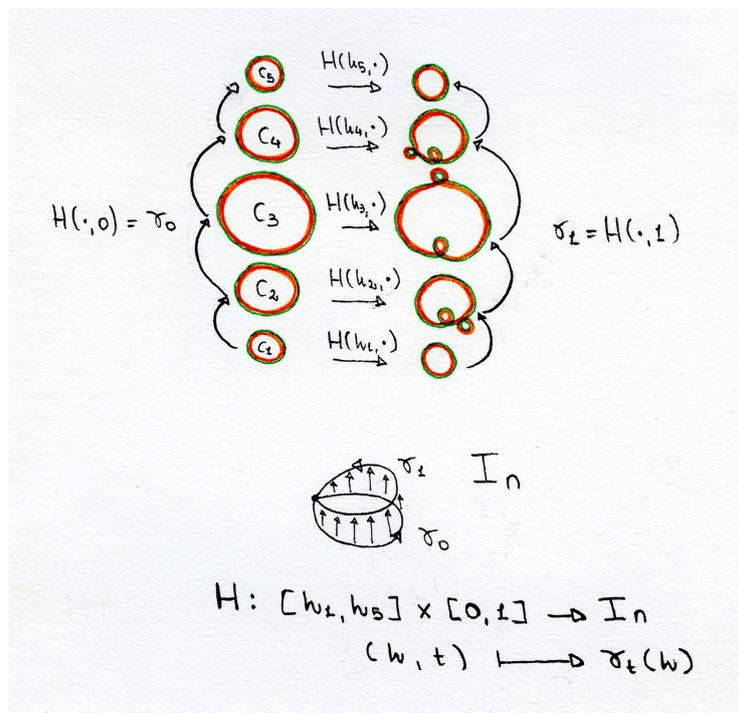


FIGURE 2.4 – Homotopie régulière à paramètre : passage de S à S_1 .

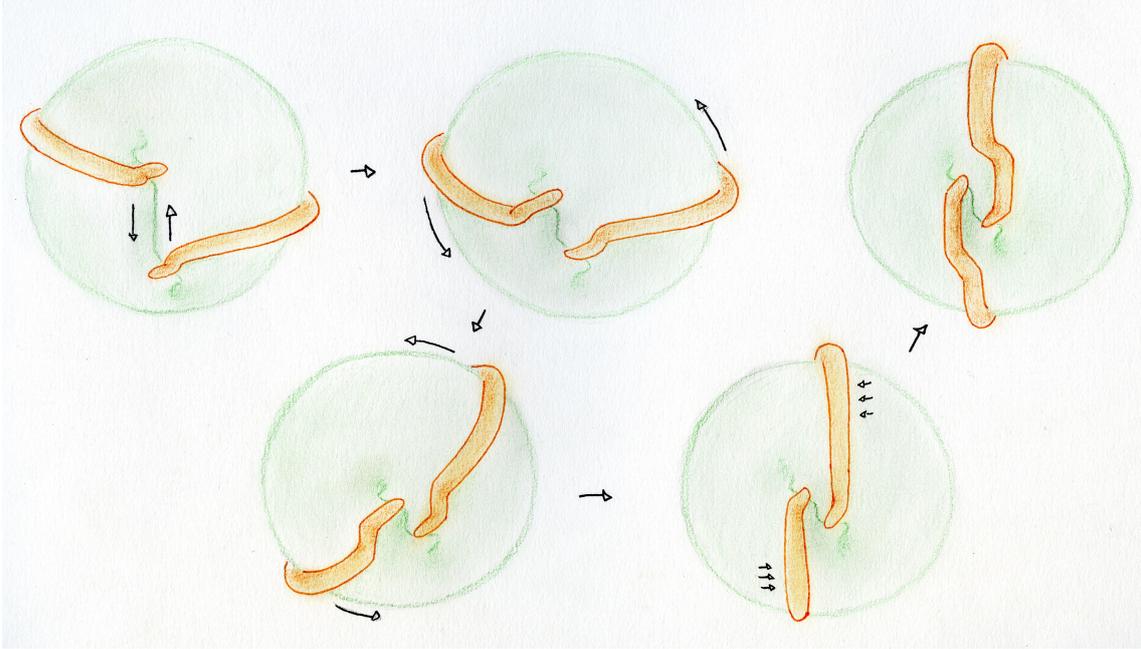


FIGURE 2.5 – Déformation de la surface S_1 . Un de ces passages intermédiaires est illustré à la fin du document.

2.3 Deuxième étape

Repartons de la surface S_1 . On peut amener la partie du tube orange qui dans notre dessin se trouve à droite jusqu'au sommet de la surface, en appliquant les déformations décrites dans la figure 2.5. La partie du tube qui dans le dessin se trouve à gauche est amenée jusqu'à l'extrémité inférieure de la surface.

On obtient une nouvelle surface, qu'on appellera S_2 , illustrée dans la figure 2.6. Contrairement à S_1 , les calottes de cette surface sont oranges, puisqu'elles font partie du tube orange.

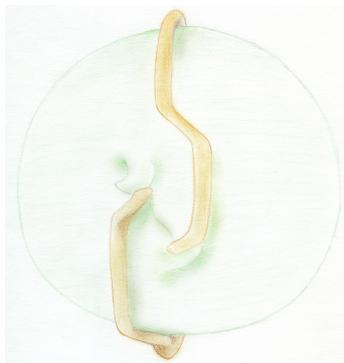


FIGURE 2.6 – La surface S_2 . Cette image est reproduite en grand format à la fin du document.

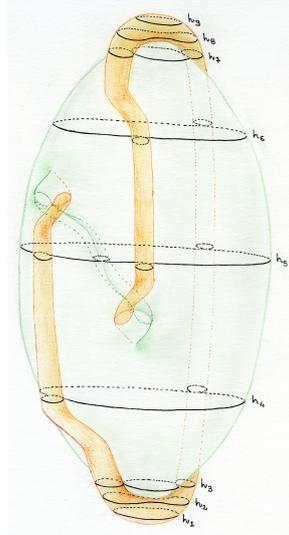


FIGURE 2.7 – Sections de S_2 . Cette image est reproduite en grand format à la fin du document.

2.4 Troisième étape

De même que pour S_1 , coupons la surface S_2 par des plans $\{z = h_i\}$, comme illustré dans la figure 2.7.

On obtient une famille de courbes qui est représentée dans la figure 2.8.

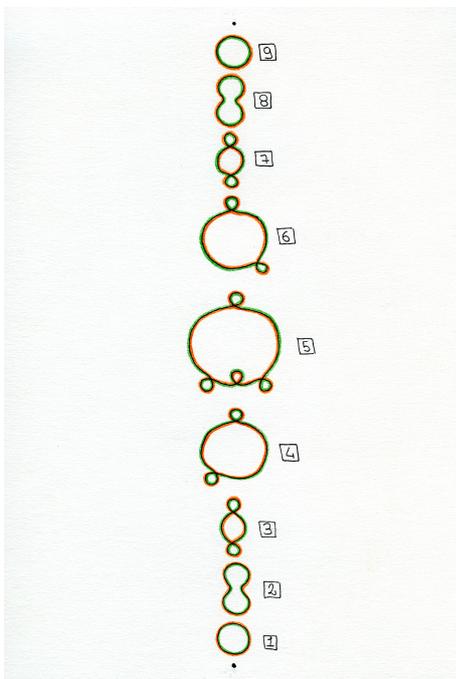
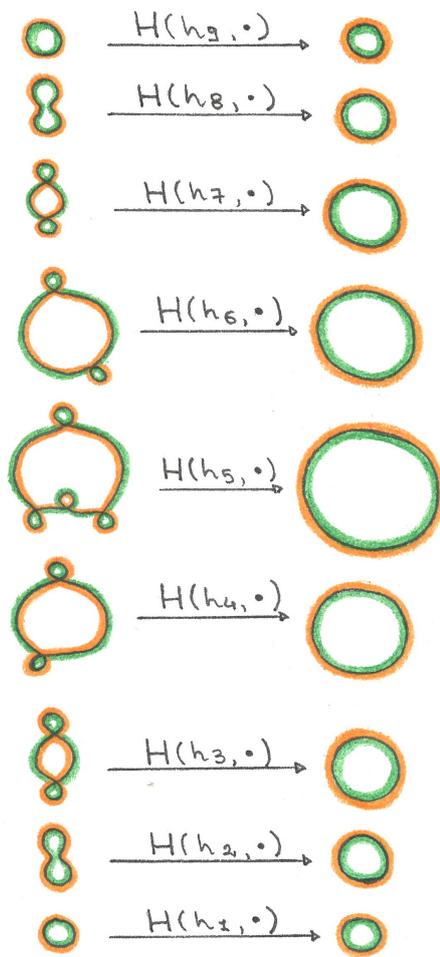


FIGURE 2.8 – Séquence 2.

Ici le mouvement décrit dans le paragraphe 2.1 est effectué pour passer de la courbe [4] à la courbe [5], et puis à l'inverse de la courbe [5] à la courbe [6]. Les cercles [1] et [9] correspondent à des coupures effectuées respectivement sur les calottes inférieure et supérieure de S_2 , qui sont oranges à l'extérieur.

Il existe une homotopie régulière à paramètre qui transforme cette famille de courbes en celle représentée à droite dans la figure 2.9. Cette homotopie induit une homotopie régulière joignant S_2 à la sphère retournée \bar{S} .

A travers les trois étapes qui ont été décrites, nous avons retourné la sphère.



$$\begin{aligned}
 H : [h_2, h_9] \times [0, 1] &\longrightarrow I_{-n} \\
 (h, t) &\longmapsto \gamma_t(h)
 \end{aligned}$$

FIGURE 2.9 – Homotopie régulière à paramètre : passage de S_2 à \bar{S} .

Chapitre 3

Etude du retournement

Ce chapitre est une formalisation de la description du retournement donnée au chapitre précédent.

Définition 3.1. On dit que deux immersions C^1 d'une surface S dans \mathbb{R}^3 , f_0 et f_1 , sont dans la même classe d'homotopie régulière s'il existe une application

$$H : \begin{cases} S \times [0, 1] \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^3 \\ (P, t) \mapsto f_t(P) \end{cases}$$

telle que f_t est une immersion C^1 pour tout $t \in [0, 1]$. Une telle application est appelée une **homotopie régulière** entre f_0 et f_1 .

Si l'on note T le vecteur tangent à la sphère, N le vecteur normal à la sphère et $V = N \times T$, la normale en un point $P \in \mathbb{S}^2$ est donnée par

$$N(P) = T(P) \times V(P).$$

Or, si l'on considère l'application antipode

$$-Id_{\mathbb{S}^2} : \begin{cases} \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto -P \end{cases}$$

la normale au point $-P$ pointe à l'intérieur de la sphère, puisqu'on a

$$N(-P) = -T(P) \times (-V(P)) = T(P) \times V(P) = N(P).$$

On en déduit que passer de $Id_{\mathbb{S}^2}$ à $-Id_{\mathbb{S}^2}$ renverse l'orientation de la sphère : l'intérieur devient extérieur et l'extérieur devient intérieur.

Définition 3.2. Un **retournement de la sphère** est une homotopie régulière entre $Id_{\mathbb{S}^2}$ et $-Id_{\mathbb{S}^2}$, c'est-à-dire une application

$$H : \mathbb{S}^2 \times [0, 1] \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^3$$

telle que $H(P, 0) = P$, $H(P, 1) = -P$ pour tout $P \in \mathbb{S}^2$ et $H(\cdot, t)$ est une immersion C^1 pour tout $t \in [0, 1]$.

Dans les deux prochains paragraphes nous allons justifier l'existence des homotopies régulières représentées dans les figures 2.4 et 2.9, et nous allons expliquer comment récupérer, à partir de ces homotopies, les déformations qui permettent de passer de S à S_1 et de S_2 à \bar{S} .

3.1 Immersions préservant la hauteur

Pour tout point $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on note $h(P) = z$ la hauteur de P. On dit qu'une immersion

$$f : \mathbb{S}^2 \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^3$$

préserve la hauteur si $h(f(P)) = h(P)$ pour tout $P \in \mathbb{S}^2$ et si elle a exactement deux points à tangente horizontale, qui sont le pôle nord et le pôle sud. On note \mathcal{I}_h l'espace des immersions préservant la hauteur.

Considérons une immersion $f \in \mathcal{I}_h$. Pour $-1 < h < 1$, la restriction de f à $\mathbb{S}^2 \cap \{z = h\}$, qu'on notera f_h , est une immersion C^1 d'un cercle euclidien dans \mathbb{R}^3 , dont l'image est la courbe fermée $f(\mathbb{S}^2) \cap \{z = h\}$. L'application

$$\gamma_h = p \circ f_h : \mathbb{S}^2 \cap \{z = h\} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

où p est la projection $(x, y, z) \mapsto (x, y)$, est une immersion C^1 du cercle euclidien dans \mathbb{R}^2 .

Au voisinage du pôle nord et du pôle sud, f est un graphe au dessous et au dessus de son plan tangent. Cela revient à dire qu'il existe deux hauteurs h_0 et h_1 , proches des pôles,

$$-1 < h_0 < h_1 < 1,$$

telles que les restrictions de f à D_0 et à D_1 sont des plongements, où l'on note

$$D_0 = \mathbb{S}^2 \cap (\mathbb{R}^2 \times [-1, h_0])$$

et

$$D_1 = \mathbb{S}^2 \cap (\mathbb{R}^2 \times [h_1, 1]).$$

On appelle *calottes* les parties

$$f(D_0) = f(\mathbb{S}^2) \cap (\mathbb{R}^2 \times [-1, h_0])$$

et

$$f(D_1) = f(\mathbb{S}^2) \cap (\mathbb{R}^2 \times [h_1, 1])$$

de la surface $f(\mathbb{S}^2)$.

Nous venons de voir que l'on peut associer à chaque immersion $f \in \mathcal{I}_h$ une famille d'immersions

$$\{\gamma_h | h \in [h_0, h_1]\} \subset I$$

avec $\gamma_{h_0}, \gamma_{h_1}$ des plongements et telle que l'application

$$H : \begin{cases} \mathbb{S}^1 \times [h_0, h_1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s, h) \mapsto \gamma_h(s) \end{cases}$$

est une homotopie régulière, où I est l'espace des immersions introduit dans le Chapitre 1. D'après le Théorème 1.1, les γ_h ont le même indice de rotation n , et comme l'homotopie relie deux plongements, par le Lemme 1.3 on a $n \in \{-1, 1\}$.

Réciproquement, à une famille d'immersions $\{\gamma_h | h \in [h_0, h_1]\} \subset I$ telle que l'application

$$H : \begin{cases} \mathbb{S}^1 \times [h_0, h_1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s, h) \mapsto \gamma_h(s) \end{cases}$$

est une homotopie régulière, on peut associer une immersion préservant la hauteur. Il suffit de regarder la trace de l'homotopie H dans l'espace :

$$T : \begin{cases} \mathbb{S}^1 \times [h_0, h_1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, h) \mapsto (\gamma_h(s), h) \end{cases}$$

qui est une immersion C^1 préservant la hauteur du cylindre dans \mathbb{R}^3 . Si γ_{h_0} et γ_{h_1} sont des plongements, alors on peut refermer notre surface immergée en rajoutant deux calottes C^1 pour obtenir une immersion $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ préservant la hauteur.

Revenons à la surface S_1 . La séquence décrite dans la figure 2.2 représente une homotopie régulière du cercle $\boxed{1}$ au cercle $\boxed{5}$. D'après ce qu'on vient de dire, on peut associer à cette homotopie, en considérant sa trace dans l'espace, une immersion $f_1 \in \mathcal{I}_h$ qui soit un paramétrage de S_1 . De même, on associe à la séquence de la figure 2.8 un paramétrage $f_2 \in \mathcal{I}_h$ de la surface S_2 .

3.2 Les étapes 1 et 3

Pour deux hauteurs $-1 < h_0 < h_1 < 1$, notons $\mathcal{I}_{(h_0, h_1)}$ l'espace des immersions $f \in \mathcal{I}_h$ dont les restrictions à D_0 et à D_1 sont des plongements (avec les notations introduites dans le paragraphe précédent) et $\mathcal{I}'_{(h_0, h_1)}$ l'espace des immersions

$$g : \mathbb{S}^2 \cap (\mathbb{R}^2 \times [h_0, h_1]) \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^3$$

qui préservent la hauteur (i.e. $h(g(P)) = h(P)$ pour tout P) et dont les restrictions à $\mathbb{S}^2 \cap (\mathbb{R}^2 \times \{h_0\})$ et à $\mathbb{S}^2 \cap (\mathbb{R}^2 \times \{h_1\})$ sont des plongements.

Le lemme suivant (voir l'Annexe pour une preuve) nous montre comment passer de $\mathcal{I}_{(h_0, h_1)}$ à $\mathcal{I}'_{(h_0, h_1)}$ et réciproquement. En d'autres termes, il y a une façon d'enlever et puis rajouter les calottes de notre surface immergée.

Lemme 3.1. (i) Rajout des calottes : toute $g \in \mathcal{I}'_{(h_0, h_1)}$ a une extension $f \in \mathcal{I}_{(h_0, h_1)}$. En d'autres termes, l'application $r : \mathcal{I}'_{(h_0, h_1)} \rightarrow \mathcal{I}_{(h_0, h_1)}$ qui à $f \in \mathcal{I}_{(h_0, h_1)}$ associe sa restriction à $\mathbb{S}^2 \cap (\mathbb{R}^2 \times [h_0, h_1])$ est surjective.

(ii) Relèvement de chemins : étant donnés $f_1 \in \mathcal{I}_{(h_0, h_1)}$ et $[0, 1] \ni t \mapsto g_t \in \mathcal{I}'_{(h_0, h_1)}$ un chemin continu¹ tel que $g_1 = r(f_1)$, il existe un chemin continu $t \mapsto f_t \in \mathcal{I}_{(h_0, h_1)}$ tel que f_t étend g_t pour tout t .

Considérons le paramétrage $f_1 \in \mathcal{I}_h$ de S_1 et la famille de courbes $\{\gamma_h | h \in [h_1, h_5]\}$ associée.

1. Sur les espaces $\mathcal{I}_{(h_0, h_1)}$ et $\mathcal{I}'_{(h_0, h_1)}$ on considère la topologie de la convergence uniforme des fonctions et de leurs dérivées.

Comme $\gamma_{h_1} = \gamma_{h_5}$, l'homotopie de la figure 2.2 peut être vue comme un lacet, qu'on notera γ_1 , dans l'espace I_1 des immersions du cercle d'indice 1 :

$$\gamma_1 : \begin{cases} [h_1, h_5] \rightarrow I_1 \\ h \mapsto \gamma_h \end{cases} .$$

Par ailleurs, les cercles C_i représentent un lacet

$$\gamma_0 : [h_1, h_5] \rightarrow I_1$$

basé en γ_{h_1} .

Puisque I_1 est contractile (Lemme 1.1), il existe une homotopie

$$\tilde{H} : [h_1, h_5] \times [0, 1] \rightarrow I_1$$

telle que $\tilde{H}(h, 0) = \gamma_0(h)$, $\tilde{H}(h, 1) = \gamma_1(h)$ pour tout h et $\tilde{H}(h_1, t) = \tilde{H}(h_5, t) = \gamma_{h_1}$ pour tout t .

Le Lemme suivant est prouvé dans l'Annexe.

Lemme 3.2. *Soit $n \in \{-1, 1\}$. Supposons d'avoir une homotopie régulière $\gamma_h(s)$ correspondant à un chemin continu*

$$\gamma : \begin{cases} [h_0, h_1] \rightarrow I_n \\ h \mapsto \gamma_h \end{cases}$$

et une homotopie

$$\tilde{H} : \begin{cases} [h_0, h_1] \times [0, 1] \rightarrow I_n \\ (h, t) \mapsto \tilde{H}(h, t) \end{cases}$$

telle que $\tilde{H}(\cdot, 1) = \gamma$, $\tilde{H}(h, 0)$ est un plongement pour tout h et $\tilde{H}(h_0, t)$, $\tilde{H}(h_1, t)$ sont des plongements pour tout t . Alors il existe une homotopie H ayant les mêmes propriétés que \tilde{H} et telle que l'application

$$H_t : \begin{cases} \mathbb{S}^1 \times [h_0, h_1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s, h) \mapsto H(h, t)(s) \end{cases}$$

est une homotopie régulière pour tout t et l'application $t \mapsto H_t$ est continue de $[0, 1]$ dans l'espace de Banach $C^1(\mathbb{S}^1 \times [h_0, h_1]; \mathbb{R}^2)$.

Puisque le chemin γ_1 et l'homotopie \tilde{H} satisfont les hypothèses du Lemme 3.2, on récupère une homotopie

$$H : \begin{cases} [h_1, h_5] \times [0, 1] \rightarrow I_1 \\ (h, t) \mapsto H(h, t) = \gamma_t(h) \end{cases}$$

ce qui explique la figure 2.4. De plus, le lemme nous assure que

$$H_t : \begin{cases} \mathbb{S}^1 \times [h_1, h_5] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s, h) \mapsto H(h, t)(s) \end{cases}$$

est une homotopie régulière pour tout t et que l'application $t \mapsto H_t$ est continue. Par conséquent, l'application $t \mapsto T_t$ est aussi continue, où

$$T_t : \begin{cases} \mathbb{S}^1 \times [h_1, h_5] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, h) \mapsto (H(h, t)(s), h) \end{cases}$$

est la trace de l'homotopie H_t . L'application T_0 fournit un paramétrage de la sphère S privée des calottes. De même, T_1 est un paramétrage de la surface S_1 privée des calottes.

Considérons la projection radiale du cylindre sur la sphère

$$\pi : \mathbb{S}^1 \times [h_1, h_5] \rightarrow \mathbb{S}^2$$

et pour tout t notons $g_t = T_t \circ \pi^{-1}$. On recupère un chemin continu

$$\begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathcal{I}'_{(h_1, h_5)} \\ t \mapsto g_t \end{cases}$$

où g_1 est la restriction de f_1 à $\mathbb{S}^2 \cap (\mathbb{R}^2 \times [h_1, h_5])$. D'après le Lemme 3.1, il existe un chemin continu $t \mapsto f_t \in \mathcal{I}'_{(h_1, h_5)}$ tel que f_t étend g_t pour tout t . Ce chemin est l'homotopie cherchée, reliant la sphère S à la surface S_1 .

En se plaçant dans I_{-1} , un raisonnement similaire permet de démontrer l'existence de l'homotopie de la figure 2.9 et de celle reliant S_2 à \bar{S} .

Annexe

On prouve ici, à l'aide d'un résultat supplémentaire, les Lemmes 3.1 et 3.2. Les preuves s'inspirent de [1]. On joint ensuite des dessins illustrant diverses phases du retournement de Chéritat.

On reprend dans la suite les notations introduites au Chapitre 1 pour énoncer les résultats concernant les courbes plongées dans \mathbb{R}^2 . Pour une preuve du résultat suivant, voir [1].

Lemme 3.3. *Pour tout chemin continu*

$$\begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathcal{P} \\ t \mapsto \gamma_t \end{cases}$$

où \mathcal{P} est muni de la topologie héritée de l'espace de Banach $C^1(\mathbb{S}^1; \mathbb{R}^2)$, il existe un chemin continu

$$\begin{cases} [0, 1] \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{R}^2) \\ t \mapsto \varphi_t \end{cases}$$

tel que $\varphi_0 = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ et $\gamma_t = \varphi_t \circ \gamma_0$ pour tout t .

Preuve du Lemme 3.1. (i) : Soit $g \in \mathcal{I}'_{(h_0, h_1)}$. On se limitera à montrer comment rajouter la calotte inférieure, le même raisonnement pouvant être utilisé pour rajouter la calotte supérieure.

La courbe

$$\gamma = p \circ g : \mathbb{S}^2 \cap (\mathbb{R}^2 \times \{h_0\}) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

(où p est la projection $(x, y, z) \mapsto (x, y)$) étant un plongement, d'après la Proposition 1.1 il existe un C^1 -difféomorphisme φ de \mathbb{R}^2 tel que $\varphi \circ \gamma$ est l'identité du cercle euclidien $\mathbb{S}^2 \cap (\mathbb{R}^2 \times \{h_0\})$. On pose $\phi(x, y, z) = (\varphi(x, y), z)$. Il suffit alors de rajouter la calotte inférieure de \mathbb{S}^2 à $\phi \circ g$ et d'appliquer ϕ^{-1} pour obtenir une nouvelle surface avec une calotte inférieure C^1 dont la restriction à $\mathbb{S}^2 \cap (\mathbb{R}^2 \times [h_0, h_1])$ est g .

Néanmoins, cette nouvelle surface ne serait que C^0 au niveau de la courbe γ : les dérivées partielles le long des méridiens à proximité de cette courbe auraient des valeurs différentes au-dessus et au-dessous de la courbe.

Pour résoudre ce problème, considérons un prolongement C^1 de g au voisinage de la courbe γ : pour un $\varepsilon > 0$ assez petit, on prolonge g en \tilde{g} de sorte que \tilde{g} soit un plongement sur $\mathbb{S}^2 \cap (\mathbb{R}^2 \times (h_0 - \varepsilon, h_0])$. On considère ensuite une fonction $t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 valant 1 sur $\{x|x \geq 1\}$ et 0 sur $\{x|x \leq 0\}$.

Définissons une extension $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de g telle que

$$f(P) = \left(1 - t \left(\frac{h_0 - h(P)}{\eta}\right)\right) \tilde{g}(P) + t \left(\frac{h_0 - h(P)}{\eta}\right) P$$

pour $h_0 - \eta < h(P) < h_0$, avec $0 < \eta < \varepsilon/2$, et qui soit l'identité pour $h(P) \leq h_0 - \eta$.

Il est évident que f préserve la hauteur et pour η suffisamment petit elle est un plongement pour $h(P) \leq h_0$.

(ii) : En notant π la projection radiale du cylindre sur la sphère, quitte à composer avec π^{-1} on a une expression de la forme

$$g_t : \begin{cases} \mathbb{S}^1 \times [h_0, h_1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, h) \mapsto (b_t(s, h), h) \end{cases} .$$

Posons $\gamma_t = b_t(\cdot, h_1)$. Puisque la restriction de g_t à $\mathbb{S}^1 \times \{h_1\}$ est un plongement, on peut appliquer le Lemme 3.3 à $t \mapsto \gamma_t$ pour trouver un chemin continu $t \mapsto \varphi_t \in \text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ qui termine avec l'identité de \mathbb{R}^2 et tel que $\gamma_t = \varphi_t \circ \gamma_1$ pour tout t . On pose $\phi_t(x, y, z) = (\varphi_t(x, y), z)$. On obtient ainsi une famille $\{\tilde{g}_t = \phi_t^{-1} \circ g_t\}_t$ qui satisfait $\tilde{g}_t(\cdot, h_1) = g_1(\cdot, h_1)$ pour tout t : la courbe supérieure (c'est-à-dire la restriction à $\mathbb{S}^2 \cap (\mathbb{R}^2 \times \{h_1\})$) ne change pas quand t varie.

Comme dans le point (i), on se ramène au cas où cette courbe est l'identité du cercle euclidien $\mathbb{S}^2 \cap (\mathbb{R}^2 \times \{h_1\})$ pour pouvoir ensuite rajouter la calotte supérieure de \mathbb{S}^2 et recomposer avec ϕ_t . Pour régulariser, on procède comme dans le point (i) avec une interpolation linéaire, cette fois-ci entre un prolongement de g_t et f_1 , avec un choix de η qui soit uniforme par rapport à t . \square

Preuve du Lemme 3.2. Puisque \tilde{H} est continue à valeurs dans I_n , sous-espace de l'espace de Banach $C^1(\mathbb{S}^1; \mathbb{R}^2)$, les applications $f : (h, t, s) \mapsto \tilde{H}(h, t)(s)$ et $\frac{\partial f}{\partial s}$ sont continues de $R = [h_0, h_1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ dans \mathbb{C} .

On peut étendre continûment $\frac{\partial f}{\partial s}$ et $(h, t) \mapsto f(h, t, 0)$, puis intégrer pour obtenir une extension continue de f à un voisinage de R où $\frac{\partial f}{\partial s}$ existe et est continue. On se donne un noyau régularisant ϱ de classe C^1 et on convole avec f , pour en obtenir une régularisation \tilde{f} . La noyau peut être choisi de manière à ce que

$$\sup_R |\varrho * f - f|$$

et

$$\sup_R \left| \varrho * \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial s} \right|$$

soient arbitrairement petits simultanément. Ainsi, les applications $s \mapsto \tilde{f}(h, t, s)$ sont encore des immersions et $s \mapsto \tilde{f}(h, 0, s)$, $s \mapsto \tilde{f}(h_0, t, s)$, $s \mapsto \tilde{f}(h_1, t, s)$ sont encore des plongements. On pose enfin

$$H_t(s, h) = t\gamma_h(s) + (1 - t)\tilde{f}(h, 0, s)$$

et on vérifie facilement que $H(h, t) = H_t(\cdot, h)$ vérifie bien les propriétés voulues. \square

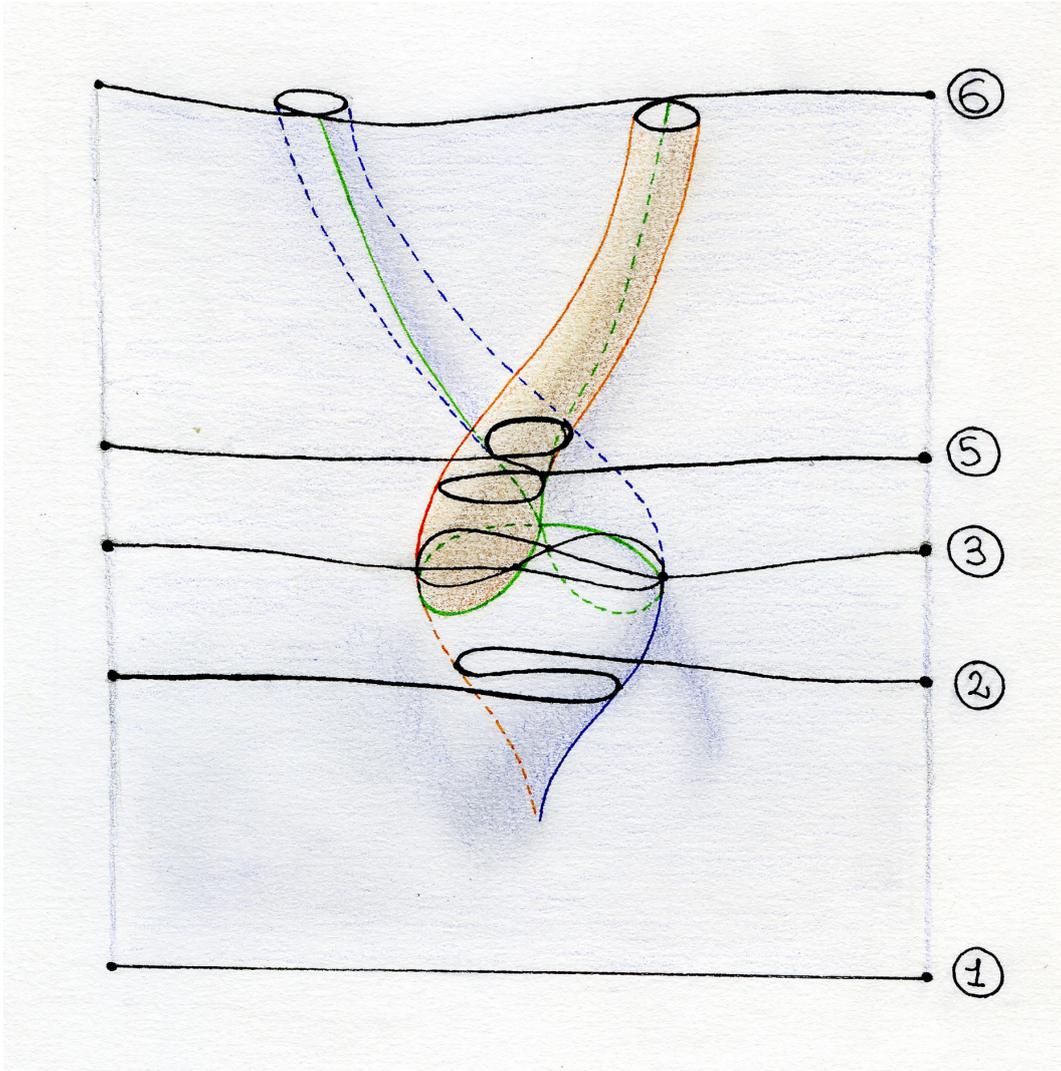
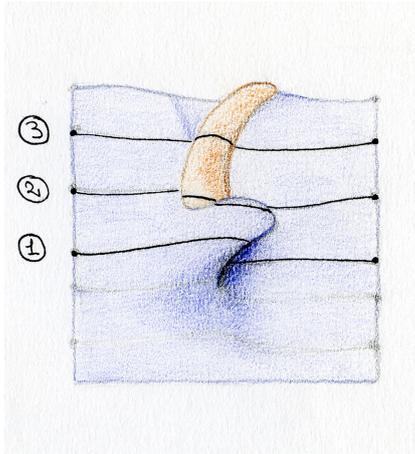


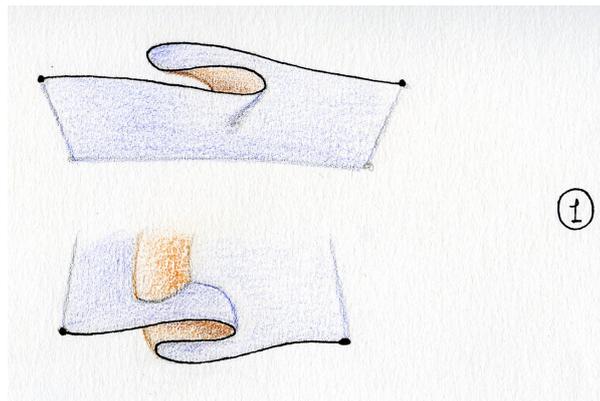
FIGURE 3.1 – La surface engendrée par le mouvement clef. Les lignes continues bleues et oranges indiquent les contours visibles, les lignes pointillées les contours cachés. Les lignes vertes (continues et pointillées) indiquent les auto-intersections (visibles et cachées respectivement). Les courbes noires sont des étapes de l'homotopie de la figure 2.1 (a).



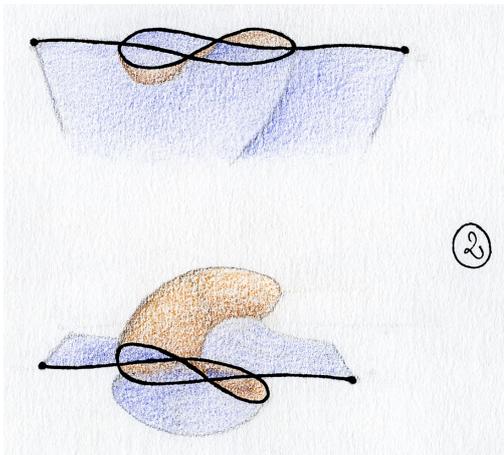
FIGURE 3.2 – La surface engendrée par le mouvement clef.



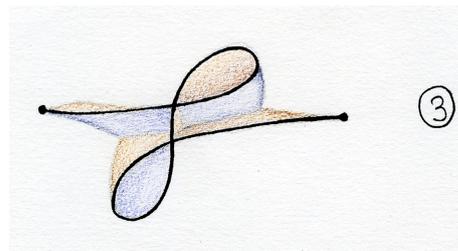
(a) La surface engendrée coupée à trois hauteurs.



(b) Coupure à la hauteur 1.



(c) Coupure à la hauteur 2.



(d) Coupure à la hauteur 3.

FIGURE 3.3 – Sections de la surface engendrée par le mouvement clef.



FIGURE 3.4 – La surface S_1 .

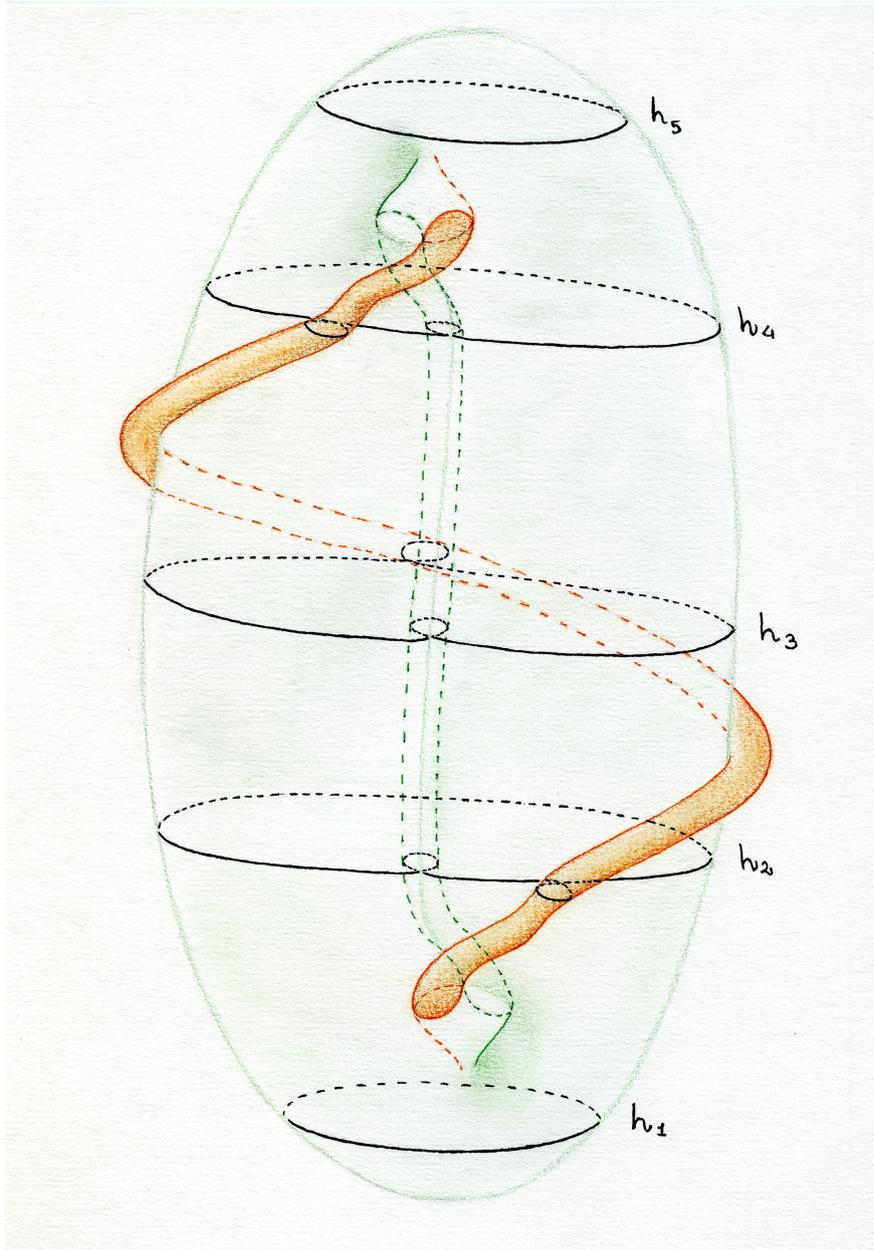


FIGURE 3.5 – La surface S_1 et ses sections. Les lignes continues indiquent les contours visibles, les lignes pointillées les contours cachés, les courbes noires sont les sections.

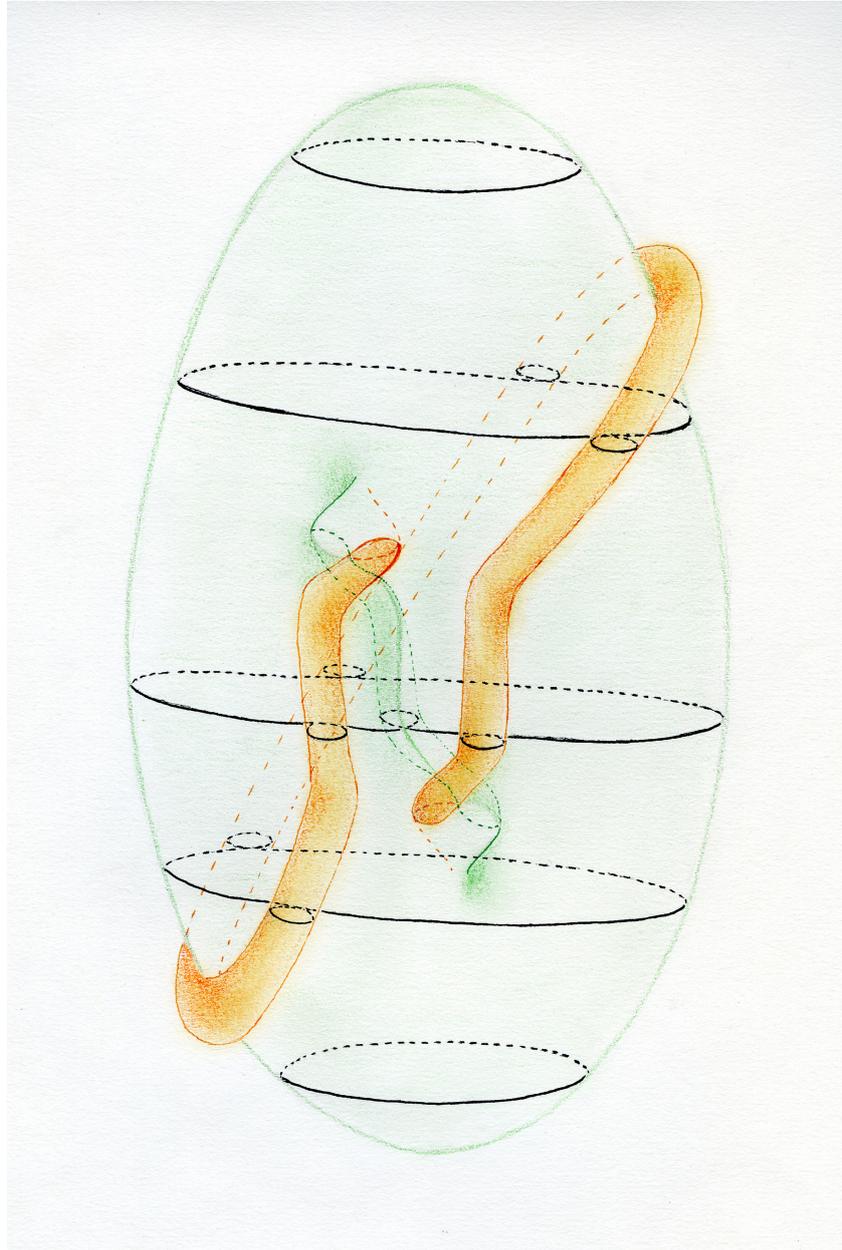


FIGURE 3.6 – Une surface intermédiaire entre S_1 et S_2 .

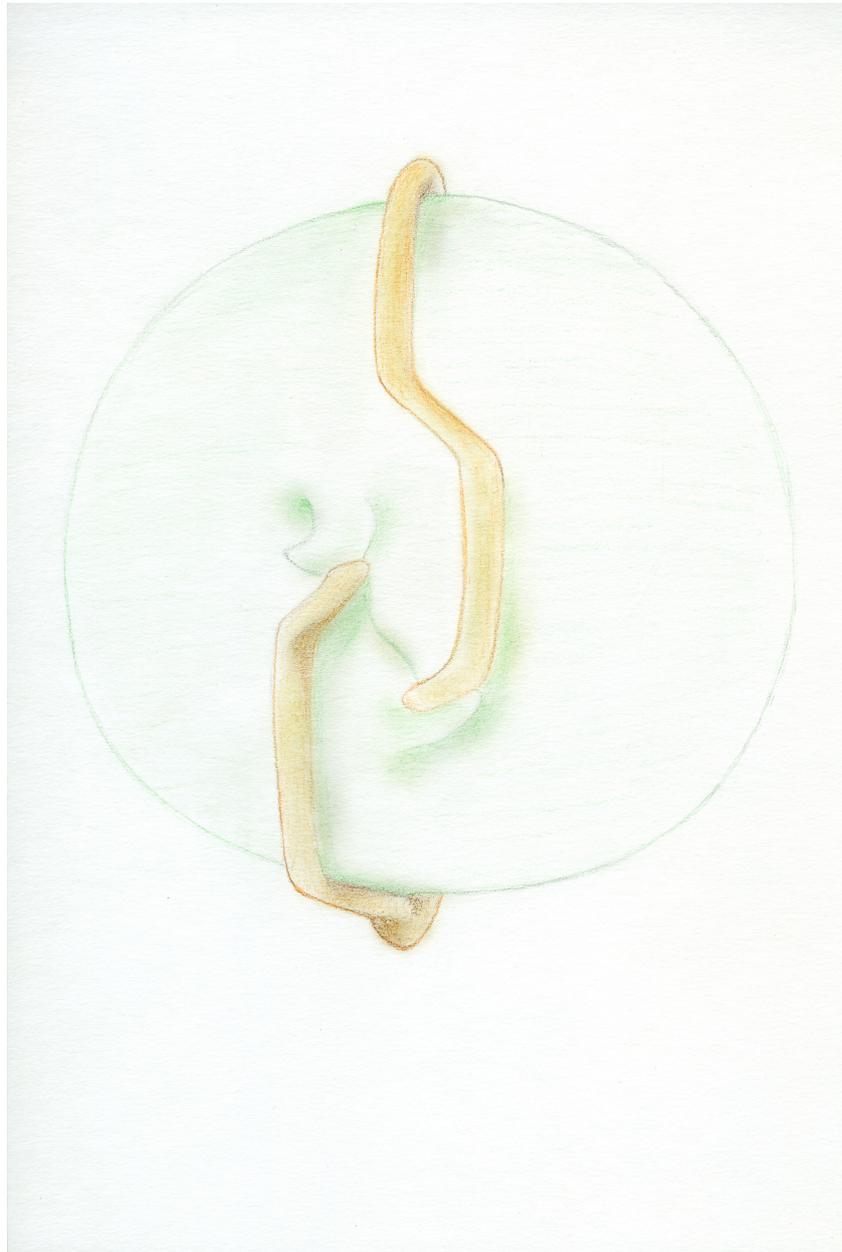


FIGURE 3.7 – La surface S_2 .

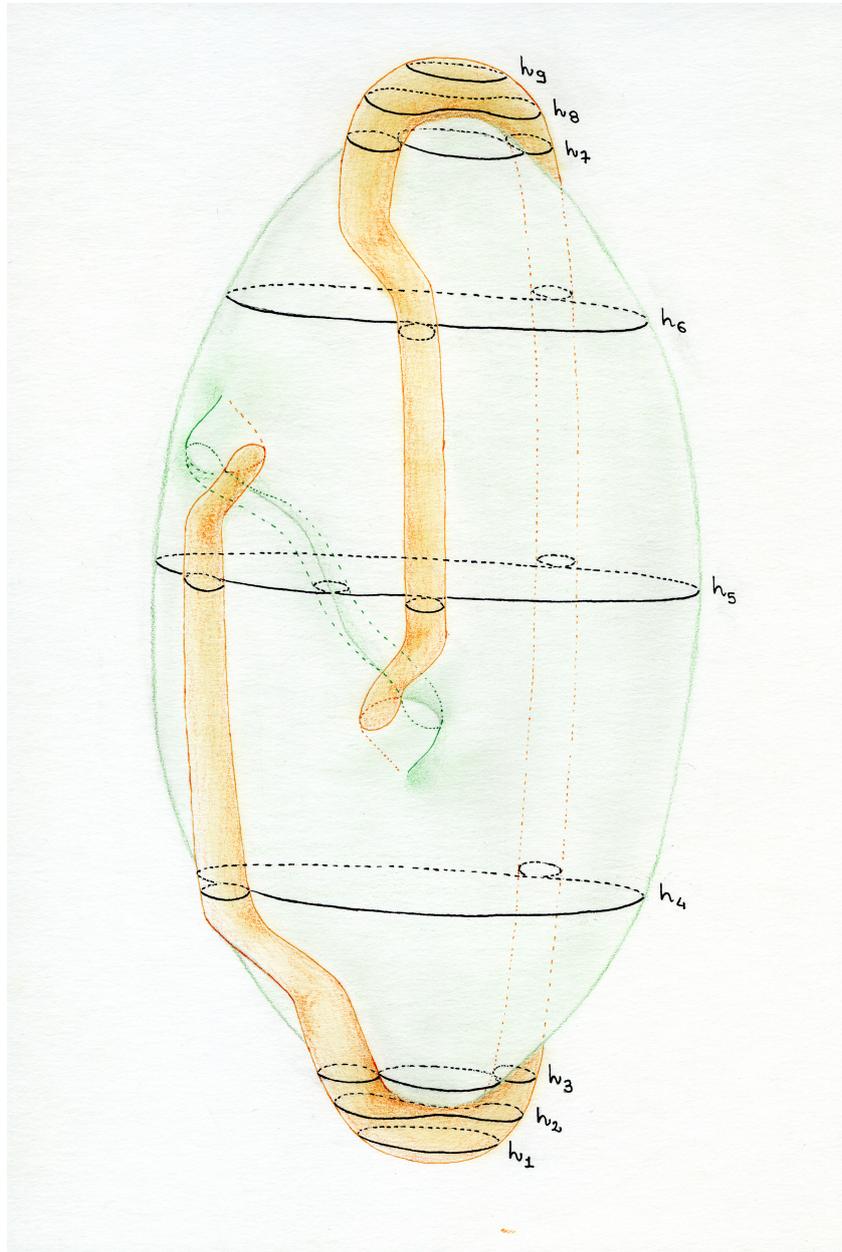


FIGURE 3.8 – La surface S_2 et ses sections.

Bibliographie

- [1] A.CHERITAT; Yet another sphere eversion; <http://arxiv.org/pdf/1410.4417v2.pdf> ; 2014.
- [2] S.LEVY, D.MAXWELL, T.MUNZNER; Outside In ; AK Peters, Wellesley, MA, Narrated videotape (21 min) from the Geometry Center ; 1994.
- [3] B.MORIN, J.-P.PETIT ; Le retournement de la sphère ; Les Progrès des Mathématiques, pages 32–45 ; Pour la Science/Belin, Paris ; 1980.
- [4] M.NELSON ; Turning a Sphere Inside Out ; International Film Bureau, Chicago, Narrated videotape (21 min) ; 1977.
- [5] A.PHILLIPS ; Turning a sphere inside out ; Sci. Amer. 214, 112–120 ; 1966.
- [6] S.SMALE ; A classification of immersions of the two-sphere ; Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 90, 281-290 ; 1958.
- [7] J.SULLIVAN ; The optiverse and other sphere eversions ; <http://arxiv.org/pdf/math/9905020v2.pdf> ; 1999.
- [8] H.WHITNEY ; On regular closed curves in the plane ; Compositio Math., 276-284 ; 1937.