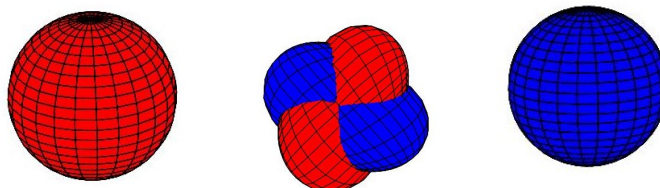




RAPPORT DE STAGE 1A

15 mai 2018 - 15 juin 2018

Le retournement de la sphère d'Adam et Witold Bednorz



Lisa BALSOLLIER

Stage encadré par :

Vincent BORRELLI, maître de conférences

borrelli@math.univ-lyon1.fr

Institut Camille Jordan

Sommaire

1 Définitions et mise en contexte	4
1.1 L'espace des immersions	4
1.2 Le retournement	6
1.2.1 Un exemple historique : le retournement du cercle	7
1.2.2 Le retournement de la sphère	8
1.3 Les éléments de la transformation	8
1.3.1 Différents types de points d'auto-intersection	8
1.3.2 Différents types d'immersions	9
1.3.3 Événements topologiques	9
2 La figure centrale du retournement des frères Bednorz	14
2.1 Le retournement du cylindre	14
2.2 Un modèle central	15
2.3 Choix du modèle central	15
2.4 Description des points d'auto-intersection de la surface centrale	16
2.4.1 Etude locale du point $(0, 0, 0)$ (en violet sur la figure)	16
2.4.2 Etude locale des points $(\pm\sqrt{2}, 0, 0)$ et $(0, \pm\sqrt{2}, 0)$ (en orange sur la figure)	18
3 Etude de la famille d'immersions (f_t) qui permet de retourner le cylindre	20
3.1 Etude locale de l'homotopie au voisinage de l'immersion $f_{t=0}$	22
3.2 Etude locale de l'homotopie au voisinage de l'immersion $f_{t \simeq 0.56}$	23
3.3 Etude locale de l'immersion $f_{t=1}$	24

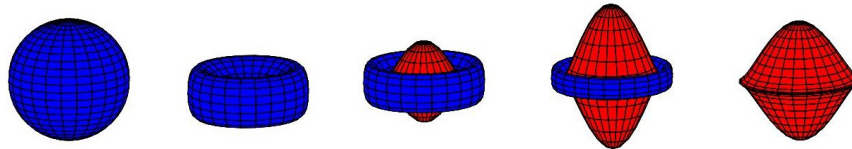
4	Extension de (f_t) à toute la sphère \mathbb{S}^2	27
4.1	Principe général	27
4.2	Explication du dernier événement topologique	28
4.3	Description du retournement de la sphère des frères Bednorz	31

Introduction

En 1957, Stephen Smale présenta un théorème de portée très générale, dont une des conséquences surprit de nombreux mathématiciens : "On peut toujours passer d'une sphère à l'autre. En particulier, on peut retourner la sphère!" [1]. Informellement, cela signifie que l'on peut déformer continûment la sphère \mathbb{S}^2 afin de la retourner, c'est-à-dire d'amener à l'extérieur sa face interne et à l'intérieur sa face externe. Mais, pour que cette déformation soit licite, il faut qu'elle respecte les trois règles suivantes :

- la surface doit rester lisse
- la surface ne doit pas être déchirée ou découpée
- les auto-intersections sont permises

Connaissant ces règles, on peut penser à retourner la sphère de la façon suivante :



Mais malheureusement, cette déformation n'est pas licite car la surface représentée dans le dernier dessin n'est pas lisse le long de l'arête équatoriale.

De nombreux mathématiciens ont donc cherché à réaliser ce retournement : en 1960, Arnold Shapiro décrit, mais ne publia pas, un retournement basé sur un retournement de la surface de Boy, en 1966, Anthony Philips publia les premiers dessins d'un retournement dans le *Scientific American* puis pendant la même période, Marcel Froissart et Bernard Morin décrivèrent un retournement, utilisant une symétrie d'ordre 4 plutôt que la surface de Boy. Bernard Morin et François Apéry montreront plus tard que ce retournement comporte le nombre minimal d'événements topologiques. La question de trouver une "façon" de retourner la sphère occupe donc de nombreux mathématiciens depuis les années 60.

En 2017, les polonais Adam et Witold Bednorz ont annoncé un nouveau retournement de la sphère, à la fois analytique et ayant un minimum d'événements topologiques. Le but de ce stage est l'étude de cet article intitulé "Analytic sphere eversion with minimum of topological events" (2017) [2]. On va décrire le retournement et préciser quelques démonstrations.

1 Définitions et mise en contexte

1.1 L'espace des immersions

On commence par rappeler la définition d'une sous-variété.

Définition 1. Un sous-ensemble Σ de \mathbb{R}^n est une **sous-variété de dimension k et de classe \mathcal{C}^p** si $\forall x \in \Sigma$, il existe un voisinage ouvert du point x , U_x , et un \mathcal{C}^p -difféomorphisme $\varphi_x : U_x \rightarrow \varphi_x(U_x) \subset \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\varphi_x(U_x \cap \Sigma) = \varphi_x(U_x) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}]$$

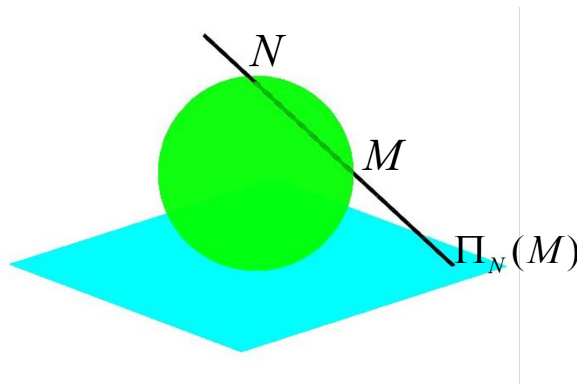
On dit alors que $(U_x \cap \Sigma, \varphi_x)$ est une **carte locale** de Σ et l'ensemble $\{(U_x \cap \Sigma, \varphi_x), x \in \Sigma\}$ est appelé **atlas** de Σ .

Dans la suite, on notera $V_x = U_x \cap \Sigma$.

Exemple : La sphère et l'application de projection stéréographique

La projection stéréographique est une bonne façon de "cartographier" la sphère. Pour cela, on note N le pôle Nord de la sphère et S son pôle Sud.

La projection stéréographique depuis le pôle Nord associe à tout point M de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ l'intersection entre le plan tangent à la sphère au point S et la droite (NM) (comme sur le schéma ci-dessous). On la note Π_N .



Dans \mathbb{R}^3 muni d'un repère orthonormé et pour une sphère de rayon 1, centrée en $(0, 0, 0)$, un calcul montre que :

$$\begin{aligned} \Pi_N : \mathbb{R}^3 \setminus \{z = 1\} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto \left(\frac{2x}{1-z}, \frac{2y}{1-z}, -1 \right) \end{aligned}$$

On écrit souvent : $\Pi_N(x, y, z) = \left(\frac{2x}{1-z}, \frac{2y}{1-z} \right)$, $z \neq 1$ en omettant la troisième coordonnée (léger abus de notation).

On pose :

$$\begin{aligned} \varphi_N : \mathbb{R}^3 \setminus \{z = 1\} &\rightarrow \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto (\Pi_N(x, y, z), 1 - (x^2 + y^2 + z^2)) \end{aligned}$$

On a $\varphi_N(\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ car $\varphi_N(x, y, z) = \left(\frac{2x}{1-z}, \frac{2y}{1-z}, 0 \right)$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$.

On définit de la même façon la projection stéréographique Π_S qui, elle, est définie sur $\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$, puis φ_S qui est définie sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{z = -1\}$

L'ensemble $\{(\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}, \varphi_N), (\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}, \varphi_S)\}$ est un atlas de \mathbb{S}^2 .

Nous allons expliciter la notion de classe \mathcal{C}^k pour une fonction définie sur une sous-variété.

Définition 2 (classe \mathcal{C}^k). Soit Σ une sous-variété de \mathbb{R}^3 de dimension 2 et $p \in \Sigma$. Soit (V_p, φ_p) une carte locale en p telle que $\varphi_p(p) = (u_0, v_0)$. Soit f une application de Σ dans \mathbb{R}^3 .

On dit que f est de classe \mathcal{C}^k en p si $f \circ \varphi_p^{-1}$ est de classe \mathcal{C}^k en (u_0, v_0) .

Définition 3 (Immersion). Soit Σ une sous-variété de \mathbb{R}^3 de dimension 2 et $p \in \Sigma$. Soit (V_p, φ_p) une carte locale en p telle que $\varphi_p(p) = (u_0, v_0)$. Soit $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$, une application de classe \mathcal{C}^∞ .

On dit que f est une **immersion en p** si les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial u}(f \circ \varphi_p^{-1})(u_0, v_0)$ et $\frac{\partial}{\partial v}(f \circ \varphi_p^{-1})(u_0, v_0)$ sont linéairement indépendantes.

L'application f est une **immersion** si f est une immersion en tout point de Σ .

Remarque : Ces deux définitions sont indépendantes de la carte locale choisie car les changements de cartes sont des difféomorphismes.

On note $I(\Sigma, \mathbb{R}^3)$, l'ensemble de toutes les immersions d'une sous-variété Σ dans \mathbb{R}^3 . $I(\Sigma, \mathbb{R}^3) \subset \mathcal{C}^\infty(\Sigma, \mathbb{R}^3)$ mais contrairement à l'ensemble $\mathcal{C}^\infty(\Sigma, \mathbb{R}^3)$, $I(\Sigma, \mathbb{R}^3)$ n'est pas un espace vectoriel.

En revanche, puisque $I(\Sigma, \mathbb{R}^3) \subset \mathcal{C}^1(\Sigma, \mathbb{R}^3)$, cet ensemble est muni de la topologie induite par celle définie sur $\mathcal{C}^1(\Sigma, \mathbb{R}^3)$. C'est donc un **espace topologique**.

(Rappelons que la topologie de $\mathcal{C}^1(\Sigma, \mathbb{R}^3)$ est, en général, celle induite par la norme $\|f\|_{\mathcal{C}^1} = \|f\|_{\mathcal{C}^0} + \|df\|_{\mathcal{C}^0}$).

Définition 4 (plan tangent). Avec les notations de la définition précédente, si f est une immersion en $p = \varphi_p^{-1}(u_0, v_0)$, alors le plan passant par $f(p) = f(\varphi_p^{-1}(u_0, v_0))$ et engendré par $\frac{\partial}{\partial u}(f \circ \varphi_p^{-1})(u_0, v_0)$ et $\frac{\partial}{\partial v}(f \circ \varphi_p^{-1})(u_0, v_0)$ est appelé **plan tangent en $p = \varphi_p^{-1}(u_0, v_0)$ de f** .

Définition 5. Soit Σ une sous-variété de \mathbb{R}^3 . Soient f_{t_0} et f_{t_1} deux immersions de Σ dans \mathbb{R}^3 .

On dit que f_{t_0} et f_{t_1} sont **régulièrement homotopes** s'il existe $F : \Sigma \times [t_0; t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, une application C^∞ telle que :

- $F(\cdot, t_0) = f_{t_0}$
- $F(\cdot, t_1) = f_{t_1}$
- $\forall t \in [t_0; t_1], F(\cdot, t)$ est une immersion

On dit que $(F(\cdot, t))_{t \in [t_0; t_1]}$ est une **homotopie régulière** joignant f_{t_0} à f_{t_1} .

1.2 Le retournement

On note :

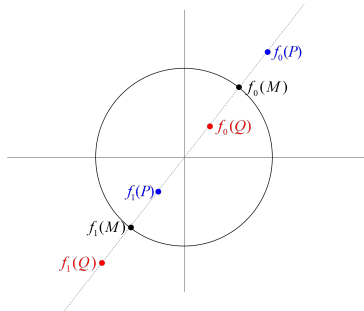
$$\text{Inv}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$$x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$$

Définition 6.

- **Retourner le cercle** c'est montrer que l'inclusion canonique $f_0 : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ et $f_1 = -\text{Inv}_{\mathbb{R}^2} \circ f_0$ sont régulièrement homotopes.
- **Retourner la sphère** c'est montrer que l'inclusion canonique $f_0 : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ et $f_1 = -\text{Inv}_{\mathbb{R}^3} \circ f_0$ sont régulièrement homotopes.

Dans \mathbb{R}^2 :



L'inversion envoie $\mathbb{D}^2 \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{D}^2$, c'est-à-dire l'intérieur (privé de O) sur l'extérieur et inversement.

1.2.1 Un exemple historique : le retournement du cercle

Définition 7. Soit $f : \mathbb{S}^1 = \{e^{i2\pi s}, s \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ une immersion.

On note : $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$
 $t \mapsto \rho(t)e^{i\theta(t)}$ avec $\rho(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

L'indice de rotation de f est le nombre entier : $Ind(f) = \frac{\theta(1) - \theta(0)}{2\pi}$.

L'ensemble des composantes connexes par arcs d'un espace topologique X est noté $\pi_0(X)$.

Théorème 1 (Whitney-Graustein, 1936 [3]). L'application

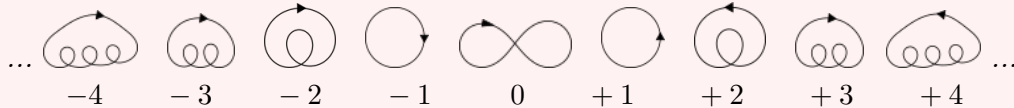
$$\begin{aligned} Ind : I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ f &\mapsto Ind(f) \end{aligned}$$

induit une bijection entre $\pi_0(I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2))$ et \mathbb{Z} .

Ainsi, d'après le théorème de Whitney-Graustein,

Corollaire 1. Soit $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une immersion.

Alors f est régulièrement homotope à l'une des immersions suivantes :



Remarque : L'entier figurant sous chaque courbe est l'indice de la courbe.

Remarque :  est régulièrement homotope à .

Notons que f_0 et $f_1 \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ sont régulièrement homotopes si et seulement si il existe une famille $(f_t)_{t \in]0;1[} \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)^{]0;1[}$ qui relie f_0 et f_1 , si et seulement si f_0 et f_1 sont dans la même composante connexe par arcs de $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$.

Ainsi, la relation "être régulièrement homotope" est une relation d'équivalence qui coïncide avec la relation "être dans la même composante connexe par arcs de $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ ".

Corollaire 2. Le cercle unité ne se retourne pas dans le plan.

Démonstration. Si on veut montrer que le cercle se retourne dans le plan, alors il faut montrer que $f_0 : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ et $f_1 = -Inv_{\mathbb{R}^2} \circ f_0$ sont régulièrement homotopes.

Or $Ind(f_0) = 1$ et $Ind(f_1) = -1$ donc d'après le théorème de Whitney-Graustein, f_0 et f_1 ne sont pas dans la même composante connexe, donc f_0 et f_1 ne sont pas régulièrement homotopes. \square

Le retournement de la sphère est-il, comme celui du cercle, impossible ?

1.2.2 Le retournement de la sphère

Théorème 2 (Smale, 1957 [1]). *L'espace $I(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3)$ est connexe par arcs.*

Corollaire 3. *Le retournement de la sphère est possible.*

1.3 Les éléments de la transformation

Lorsque les surfaces se déforment, elles se replient, elles se tordent, et il va donc y avoir des points de contact, des points d'auto-intersection, là où la surface se recoupe avec elle-même.

1.3.1 Différents types de points d'auto-intersection

Définition 8 (Point double). *Soit $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ une immersion d'une surface Σ dans \mathbb{R}^3 . Soit $P \in f(\Sigma)$. Si $f^{-1}(P) = \{P_1, P_2\}$ avec $P_1 \neq P_2$ alors P est dit **point double**.*

Remarque : Si P est un point double, alors il existe deux plans tangents de f en P . On définit similairement les points triples, les points quadruples, etc...

Définition 9 (Point double transverse). *Soit $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ une immersion d'une surface Σ dans \mathbb{R}^3 . Soit P un point double de f . Si les deux plans tangents de f en P ne sont pas confondus, alors on dit que P est un **point double transverse**.*

Définition 10 (Point triple transverse). *Soit $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ une immersion d'une surface Σ dans \mathbb{R}^3 . Soit P un point triple de f . Si l'intersection entre les trois plans tangents de f en P est réduite au point P , alors on dit que P est un **point triple transverse**.*

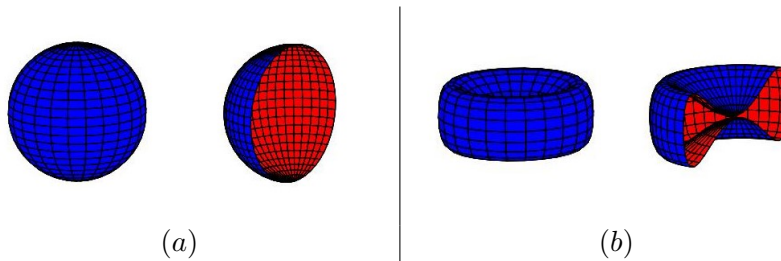
Définition 11 (Point quadruple transverse). *Soit $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ une immersion d'une surface Σ dans \mathbb{R}^3 . Soit P un point quadruple de f . Si les quatre plans tangents de f en P ont trois à trois leur intersection réduite au point P , alors on dit que P est un **point quadruple transverse**.*

1.3.2 Différents types d'immersions

Définition 12 (Immersion transversale). Soit $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ une immersion d'une surface Σ dans \mathbb{R}^3 . On dit que f est une **immersion transversale** si tout point d'auto-intersection est soit un point double transverse, soit un point triple transverse et si, de plus, le nombre de points triples transverses est fini.

L'ensemble des immersions transversales d'une sous-variété Σ dans \mathbb{R}^3 est noté $I_\tau(\Sigma, \mathbb{R}^3)$

Exemple :



L'immersion (a) est une immersion **transversale** de la sphère \mathbb{S}^2 dans \mathbb{R}^3 . En effet, il n'y a pas de points d'auto-intersection.

L'immersion (b) est une immersion **non transversale** de la sphère \mathbb{S}^2 dans \mathbb{R}^3 . En effet, le point du centre est un point d'auto-intersection qui est un point double non transverse puisque les deux plan tangents de cette immersion en ce point sont confondus.

Proposition 1 (Apéry, [4]). L'ensemble des immersions transversales de la sphère dans \mathbb{R}^3 , noté $I_\tau(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3)$, est composé d'une infinité de composantes connexes.

1.3.3 Événements topologiques

La déformation de la sphère s'effectue par une famille d'immersions sur \mathbb{S}^2 . Certaines peuvent être transversales et d'autres pas.

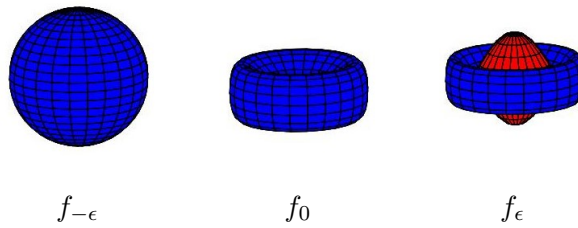
C'est ainsi que nous sommes amenés à considérer la notion d'**événements topologiques**.

Définition 13. On appelle *événement topologique* toute homotopie régulière (f_t) , $t \in [-\epsilon, \epsilon]$, telle que :

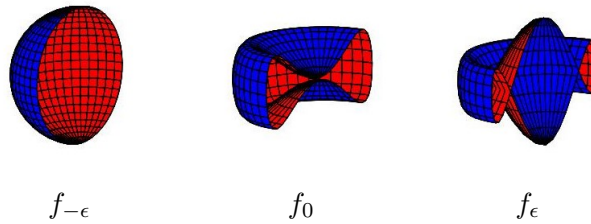
- $f_t \in I_\tau(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3)$, $\forall t \in [-\epsilon, \epsilon] \setminus \{0\}$
- $f_0 \in I(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3) \setminus I_\tau(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3)$

Exemple :

La famille d'immersion (f_t) qui agit sur la sphère de la façon illustrée ci-dessous est un **événement topologique** :



Coupons la sphère par un plan vertical passant par le centre et on obtient les figures suivantes :



Pour $t \in [-\epsilon, 0[$, il n'y a pas de points d'auto-intersection.

Pour $t = 0$, il y a un unique point d'auto-intersection, qui est un point double non transverse.

Pour $t \in]0, \epsilon]$, tous les points d'auto-intersection sont des points doubles transverses.

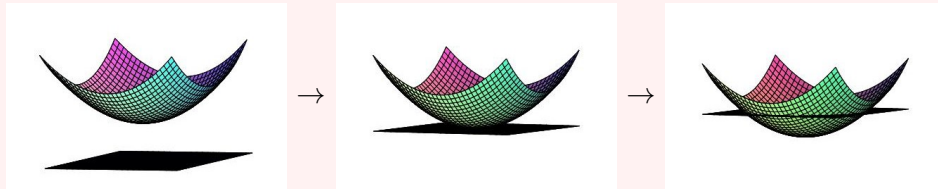
Donc $(f_t)_{t \in [-\epsilon, \epsilon]}$ est un événement topologique sur la sphère.

Parmi les événements topologiques, certains, appelés **événements topologiques génériques** sont remarquables.

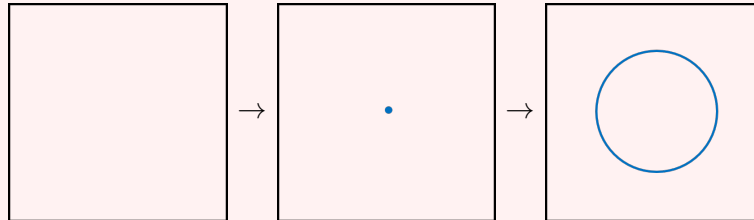
Définition 14 (Événement topologique générique [5]).

On dit qu'un événement topologique est **générique** s'il appartient à l'un des six événements topologiques ci-dessous :

— Événement D_0 :



La courbe d'auto-intersection au cours de l'événement :



Dans un premier temps, il n'y a pas de point d'auto-intersection.

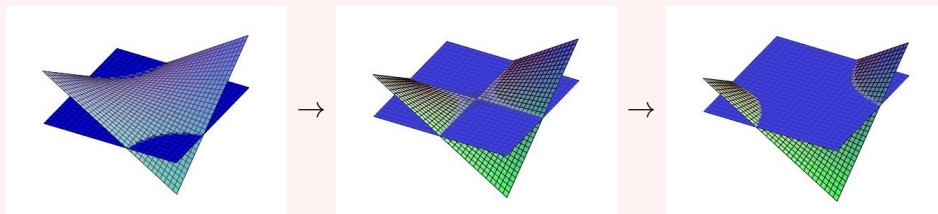
Puis, il y a un point d'auto-intersection, qui est un point double non transverse.

Ensuite, la courbe d'auto-intersection est fermée simple et ne comporte que des points doubles transverses.

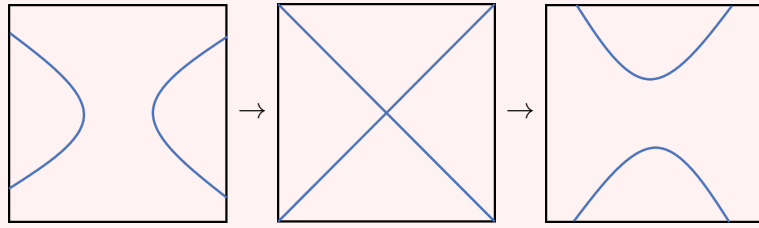
— Événement D_2 :

Cet événement représente la disparition d'une courbe d'intersection comme la précédente (figures précédentes lues dans l'ordre inverse).

— Événement D_1 :



La courbe d'auto-intersection au cours de l'événement :

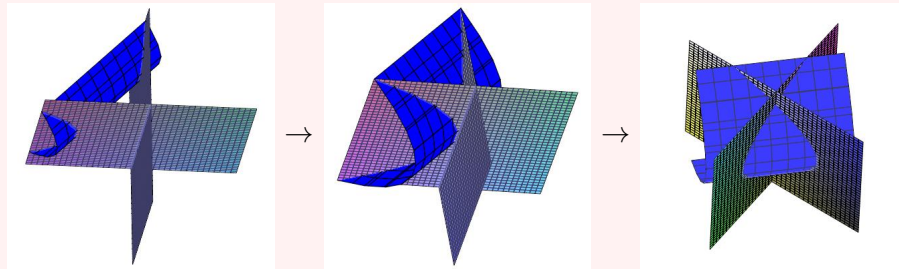


Dans un premier temps, la courbe d'auto-intersection peut être comparée à deux morceaux de branches d'hyperbole. Elle ne contient que des points doubles transverses. Puis, la courbe d'auto-intersection est la réunion de deux segments de droites, et possède que des points doubles transverses, excepté le point du centre qui est un point double non transverse.

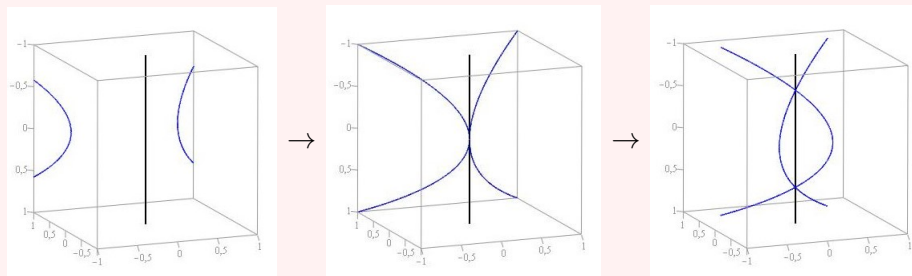
Ensuite, la courbe d'auto-intersection peut être, de nouveau, comparée à deux morceaux de branches d'hyperbole et ne contient que des points doubles transverses.

Cet événement est symétrique temporellement.

— Événement T^+ :



La courbe d'auto-intersection au cours de l'événement :



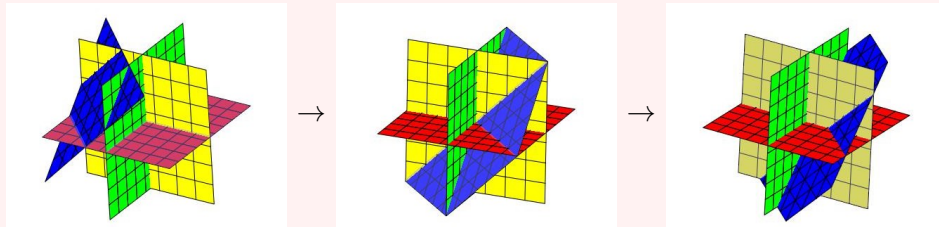
Dans un premier temps, la courbe d'intersection ne comporte que des points doubles transverses. Puis, la courbe d'intersection possède un point triple non transverse.

Ensuite, elle comporte des points doubles transverses et deux points triples transverses.

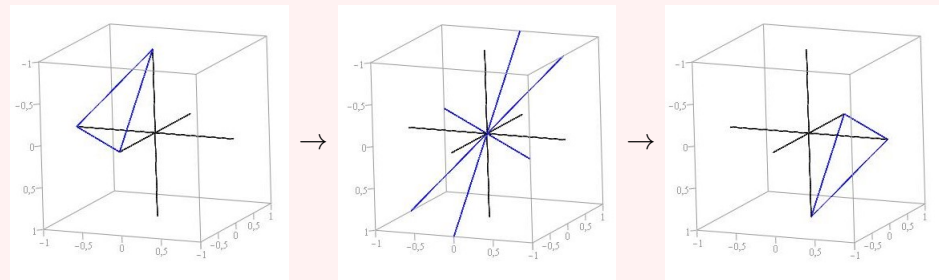
— Événement T^- :

Cet événement est l'opération opposée temporellement à la précédente, c'est-à-dire la disparition de points triples (figures précédentes lues dans l'ordre inverse).

— Événement Q :



La courbe d'auto-intersection au cours de l'événement :



Dans un premier temps, la courbe d'auto-intersection ne possède que des points doubles transverses et un nombre fini de points triples transverses. Puis, elle possède des points doubles transverses et un point quadruple transverse.

Ensuite, elle possède de nouveau que des points doubles transverses et un nombre fini de points triples transverses.

Cet événement est symétrique temporellement.

Ces modifications génériques vont nous permettre d'étudier un retournement de sphère, en suivant pas à pas la déformation à partir de ces modifications.

2 La figure centrale du retournement des frères Bednorz

Ce retournement est analytique (c'est-à-dire construit à partir d'immersions qui sont localement développables en séries entières) et contient 13 événements topologiques dont 11 génériques. Nous allons maintenant décrire précisément ce retournement.

2.1 Le retournement du cylindre

Le cylindre droit de \mathbb{R}^3 , d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = 1$ (dans un repère orthonormé), est paramétré par : $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix}$, $(\varphi, h) \in \mathbb{R}^2$. Un atlas du cylindre peut être

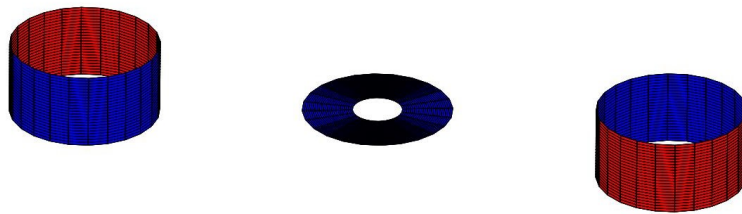
construit à partir des cartes de la forme : $\begin{cases} \Sigma \setminus \{\text{droite verticale}\} & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ M & \longmapsto (\varphi, h) \end{cases}$.

Ainsi, une immersion du cylindre Σ peut être plus simplement donnée par :

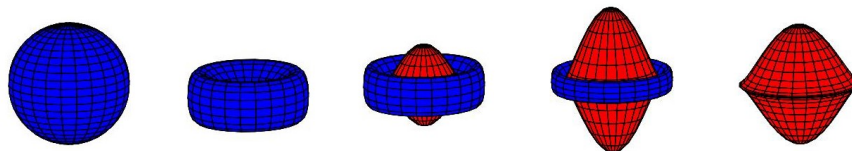
$f : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\varphi, h) & \longmapsto f(\varphi, h) \end{cases}$ où $f(\varphi + 2\pi, h) = f(\varphi, h)$ avec $\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}(\varphi, h), \frac{\partial f}{\partial h}(\varphi, h) \right)$ linéairement indépendants.

Les frères Bednorz ont choisi de retourner d'abord un cylindre et ensuite de prolonger ce retournement à la sphère.

Quand on parle de retournement, on imagine par exemple le retournement d'un cylindre tronqué effectué de la façon suivante :



ou celui d'une sphère effectué comme on l'a vu dans l'introduction, mais qui n'est pas licite car ce retournement aboutit à une surface non lisse :



2.2 Un modèle central

Retourner un cylindre et prolonger le retournement à la sphère est loin d'être évident. Les frères Bednorz ont commencé par adapter la technique du **modèle central**, c'est-à-dire une suite d'immersions $(f_t)_{t \in [-\epsilon, \epsilon]}$ telle que :

- $f_{-\epsilon}(\Sigma)$ est la surface de départ (rouge à l'intérieur, bleue à l'extérieur)
- $f_t, t \in [-\epsilon, 0]$ permet d'arriver à la surface centrale $f_0(\Sigma)$.
- $f_t, t \in]0, \epsilon]$ est une suite d'immersions en "miroir" de $f_t, t \in [-\epsilon, 0]$.
- $f_\epsilon(\Sigma)$ est la surface d'arrivée, c'est-à-dire la même surface que $f_{-\epsilon}(\Sigma)$ mais retournée (bleue à l'intérieur, rouge à l'extérieur).

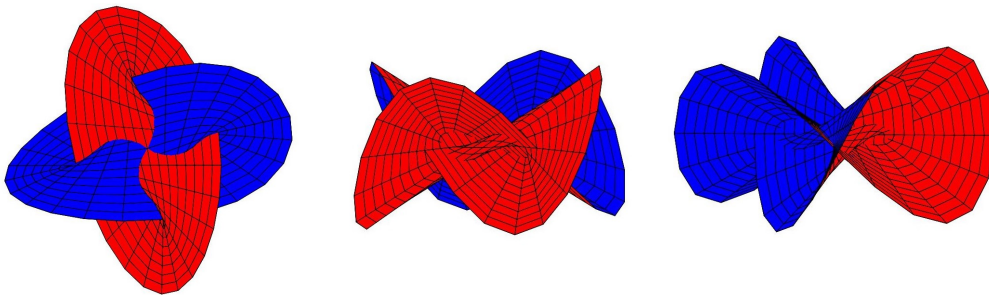
Il nous suffira donc de décrire les immersions en partant du modèle central pour obtenir la surface retournée (rouge à l'extérieur).

2.3 Choix du modèle central

Le modèle central choisi par les frères Bednorz est l'immersion f_0 du cylindre droit donnée par :

$$f_0 : \begin{pmatrix} h \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (1-h) \sin(\varphi) \\ (1+h) \cos(\varphi) \\ h \sin(2\varphi) \end{pmatrix}, \quad \forall (\varphi, h) \in \mathbb{R}^2$$

La représentation pour $(\varphi, h) \in [0, 2\pi] \times [-3, 3]$ est :



Surface centrale

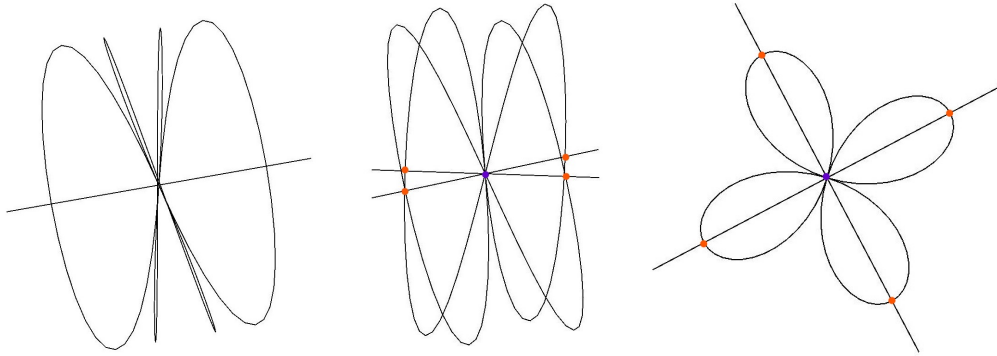
Cette surface centrale est un élément fondamental du retournement, nous allons l'étudier en détails.

2.4 Description des points d'auto-intersection de la surface centrale

Proposition 2. *L'ensemble des points d'auto-intersection du modèle central est composé des deux droites d'équation $x = z = 0$ et $y = z = 0$ ainsi que la courbe d'équation $(\sqrt{2} \cos(2\varphi) \cos(\varphi), \sqrt{2} \cos(2\varphi) \sin(\varphi), -\frac{1}{2} \sin(4\varphi))$.
En particulier, l'immersion centrale f_0 possède un point quadruple transverse et quatre points doubles non transverses, elle n'est donc pas transversale, i.e $f_0 \in I_\tau(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3) \setminus I(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3)$.*

Démonstration. La démonstration de cette proposition est en partie contenue dans l'article. On ajoute ici les démonstrations manquantes : la vérification de l'existence d'un point quadruple et de quatre points doubles non transverses. \square

La courbe d'équation $(\sqrt{2} \cos(2\varphi) \cos(\varphi), \sqrt{2} \cos(2\varphi) \sin(\varphi), -\frac{1}{2} \sin(4\varphi))$ est représentée ci-dessous.



Points d'auto-intersection de la surface centrale

Tous les points de cet ensemble de points d'auto-intersection sont des points doubles transverses, sauf le point violet et les 4 points oranges.

2.4.1 Etude locale du point $(0, 0, 0)$ (en violet sur la figure)

Proposition 3. *Le point $(0, 0, 0)$ (en violet sur la figure) est un point quadruple transverse.*

Démonstration. On cherche les antécédents du point violet de coordonnées $(0, 0, 0)$:

$$\text{On cherche donc } \varphi \text{ et } h \text{ tels que : } \begin{cases} (1-h)\sin(\varphi) = 0 & (1) \\ (1+h)\cos(\varphi) = 0 & (2) \\ h\sin(2\varphi) = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow (h = 1 \text{ ou } \sin(\varphi) = 0)$$

- Si $h = 1$:
 $(2) \Rightarrow \cos(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} [\pi]$ et donc (3) est vérifiée.
- Si $\sin(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0[\pi]$
 $(2) \Leftrightarrow h = -1$ et (3) est vérifiée.

Ainsi, le point $(0,0,0)$ a quatre antécédents qui sont $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$, $(-1, 0)$ et $(-1, \pi)$. Le point $(0,0,0)$ est donc un point quadruple.

Pour montrer qu'il est transverse, il faut montrer que ses quatres plans tangents ont trois à trois une intersection réduite à $(0,0,0)$. Déterminons les équations de ces plans en recherchant un vecteur normal à chacun des quatre plans.

Pour cela, calculons les dérivées partielles de f_0 :

$$\text{On a : } \frac{\partial f_0}{\partial h} : \begin{pmatrix} h \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ \sin(2\varphi) \end{pmatrix},$$

$$\text{et } \frac{\partial f_0}{\partial \varphi} : \begin{pmatrix} h \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (1-h)\cos(\varphi) \\ -(1+h)\sin(\varphi) \\ 2h\cos(2\varphi) \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \frac{\partial f_0}{\partial h} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ et } \frac{\partial f_0}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

ainsi le plan tangent de f_0 en $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ a pour vecteur normal

$$\frac{\partial f_0}{\partial h} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \wedge \frac{\partial f_0}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

De la même manière, en $\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$, on a :

$$\frac{\partial f_0}{\partial h} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ et } \frac{\partial f_0}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

ainsi le plan tangent de f_0 en $\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$ a pour vecteur normal $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

En $(-1, 0)$, on a :

$$\frac{\partial f_0}{\partial h} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ et } \frac{\partial f_0}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

ainsi le plan tangent de f_0 en $(-1, 0)$ a pour vecteur normal $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

En $(-1, \pi)$, on a :

$$\frac{\partial f_0}{\partial h} \begin{pmatrix} -1 \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ et } \frac{\partial f_0}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} -1 \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

ainsi le plan tangent de f_0 en $(-1, \pi)$ a pour vecteur normal $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Les quatre plans tangents en $(0, 0, 0)$ ont pour équation $-y + z = 0$, $y + z = 0$, $x + z = 0$ et $x - z = 0$.

La résolution des quatre systèmes d'équations, prises trois par trois, admet pour unique solution $(0, 0, 0)$.

Ainsi, pris trois par trois, ces plans ont pour intersection $(0, 0, 0)$ qui est donc bien un point quadruple transverse.

□

2.4.2 Etude locale des points $(\pm\sqrt{2}, 0, 0)$ et $(0, \pm\sqrt{2}, 0)$ (en orange sur la figure)

Proposition 4. *Les points $(\pm\sqrt{2}, 0, 0)$ et $(0, \pm\sqrt{2}, 0)$ (en orange sur la figure) sont des **points doubles non transverses**.*

Démonstration. La figure centrale présente une symétrie d'ordre 4. Ainsi, les 4 points oranges de la figure ci-dessus, de coordonnées $(\pm\sqrt{2}, 0, 0)$ et $(0, \pm\sqrt{2}, 0)$, sont symétriquement les mêmes.

Etudions donc un seul de ces 4 points, celui de coordonnées $(\sqrt{2}, 0, 0)$:

Cherchons les antécédents de ce point :

On cherche φ et h tels que :

$$\begin{pmatrix} (1-h)\sin(\varphi) \\ (1+h)\cos(\varphi) \\ h\sin(2\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$h \neq 0$ car $\begin{cases} \sin(\varphi) = \sqrt{2} \\ \cos(\varphi) = 0 \end{cases}$ n'a pas de solution.

Donc $\sin(2\varphi) = 0$, ie $\varphi = k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

- Si $k = 2p$:
 $\sin(p\pi) = 0$ donc il n'y a pas de solutions.

- Si $k = 2p + 1$:
 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + p\pi\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + p\pi\right) = (-1)^p$
donc $(1-h)(-1)^p = \sqrt{2}$
donc, si p est pair ($p = 2p'$), $h = 1 - \sqrt{2}$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}(4p' + 1) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
et si p est impair ($p = 2p' + 1$), $h = 1 + \sqrt{2}$ et
 $\varphi = \frac{\pi}{2}(2(2p' + 1) + 1) = \frac{\pi}{2}(4p' + 3) = \frac{3\pi}{2}[2\pi] = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Le point $(\sqrt{2}, 0, 0)$ est donc un point double car il a deux antécédents, qui sont $\left(1 - \sqrt{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ et $\left(1 + \sqrt{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$.

Cherchons maintenant les plans tangents de f_0 en $\left(1 - \sqrt{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ et $\left(1 + \sqrt{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$.

Pour cela, calculons les dérivées partielles de f_0 en $\left(1 - \sqrt{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ et $\left(1 + \sqrt{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$:

Comme précédemment, on a : $\frac{\partial f_0}{\partial h} : \begin{pmatrix} h \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ \sin(2\varphi) \end{pmatrix}$,

et $\frac{\partial f_0}{\partial \varphi} : \begin{pmatrix} h \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (1-h)\cos(\varphi) \\ -(1+h)\sin(\varphi) \\ 2h\cos(2\varphi) \end{pmatrix}$.

Donc $\frac{\partial f_0}{\partial h} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $\frac{\partial f_0}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 + \sqrt{2} \\ -2(1 + \sqrt{2}) \end{pmatrix}$,

ainsi le plan tangent de f_0 en $\left(1 + \sqrt{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ a pour vecteur normal

$$\frac{\partial f_0}{\partial h} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \wedge \frac{\partial f_0}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 2 + \sqrt{2} \\ -2(1 + \sqrt{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2(1 + \sqrt{2}) \\ 2 + \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

De la même manière, on a :

$$\frac{\partial f_0}{\partial h} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ et } \frac{\partial f_0}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(2 - \sqrt{2}) \\ -2(1 - \sqrt{2}) \end{pmatrix},$$

ainsi le plan tangent de f_0 en $\left(1 - \sqrt{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a pour vecteur normal

$$\frac{\partial f_0}{\partial h} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \wedge \frac{\partial f_0}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -(2 - \sqrt{2}) \\ -2(1 - \sqrt{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2(1 - \sqrt{2}) \\ -2 + \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} 0 \\ -(2 - \sqrt{2}) \\ -2(1 - \sqrt{2}) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 2(1 - \sqrt{2}) \\ -2 + \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les plans tangents des deux nappes de la surface au point $(\sqrt{2}, 0, 0)$ ont des vecteurs normaux colinéaires et passent tous les deux par le point $(\sqrt{2}, 0, 0)$, ils sont donc **confondus**.

Le point $(\sqrt{2}, 0, 0)$ est donc un point double non transverse. \square

3 Etude de la famille d'immersions (f_t) qui permet de retourner le cylindre

Maintenant on "fait bouger" notre figure centrale en fonction du temps.

On s'intéresse à l'homotopie régulière suivante, indexée par t ,

$$f_t : \begin{pmatrix} h \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t \cos(\varphi) + (1 - h) \sin(\varphi) \\ t \sin(\varphi) + (1 + h) \cos(\varphi) \\ h \sin(2\varphi) - \frac{t}{2} \cos(2\varphi) \end{pmatrix}, \quad \forall (\varphi, h) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$$

On remarque que pour $t = 0$, on retrouve bien l'application décrite au paragraphe précédent. Ainsi, la figure centrale apparaît en $t = 0$.

Proposition 5. *L'immersion f_t est transversale pour tout $t \in \mathbb{R}$ excepté :*

- $t = 0$
- $t = \pm \frac{\sqrt{17} - 3}{2} \simeq \pm 0.56$
- $t = \pm 1$

Démonstration. Cette démonstration résulte des calculs faits dans l'annexe de l'article. □

On va donc partir de la figure centrale (obtenue pour $t = 0$), et faire évoluer le temps positivement puisque grâce au modèle central, les figures obtenues pour des temps négatifs seront le "miroir" de celles obtenues pour des temps positifs.

On obtient ainsi les figures suivantes :

Figure obtenue pour $t = 0$, il s'agit de la **figure centrale** :

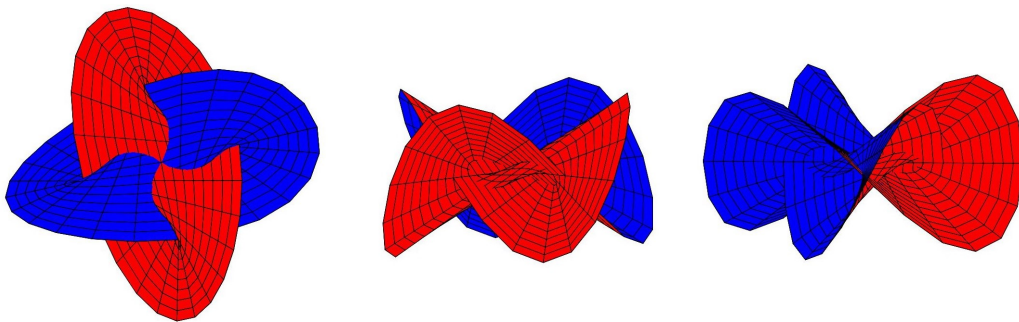


Figure obtenue pour $t \simeq 0.56$:

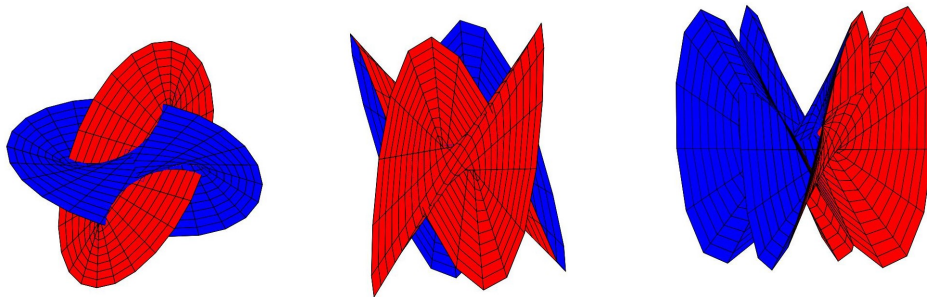
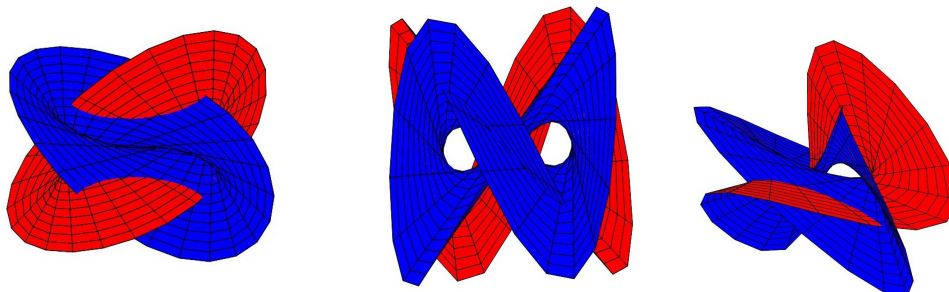


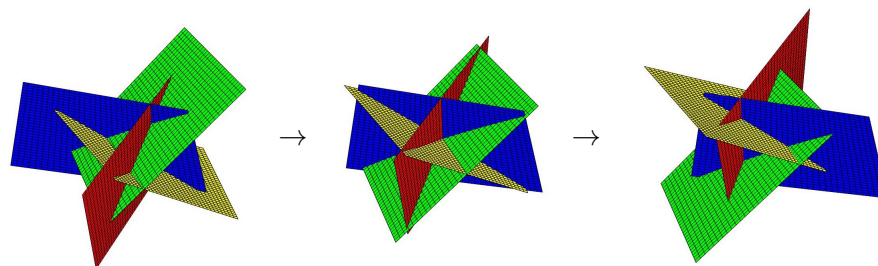
Figure obtenue pour $t = 1$:



3.1 Etude locale de l'homotopie au voisinage de l'immersion $f_{t=0}$

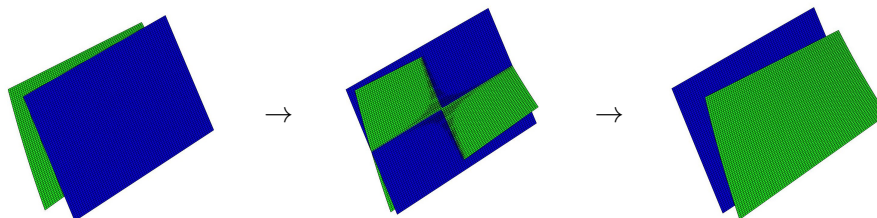
Nous avons montré, dans le paragraphe précédent, que l'image de f_0 comporte un point quadruple transverse, le point $(0,0,0)$, et quatre points doubles non transverses, les points $(\pm\sqrt{2}, 0, 0)$ et $(0, \pm\sqrt{2}, 0)$.

Si on effectue un "zoom" sur un voisinage du point $(0,0,0)$, on obtient la suite de figures suivante :



Cette suite de figures représente un **événement Q** décrit dans la *définition 14*.

Si on effectue un "zoom" sur un voisinage du point $(\sqrt{2}, 0, 0)$, on obtient la suite de figures suivante :



La courbe d'auto-intersection forme un "X", cette suite de figures représente donc un **événement** D_1 , décrit dans la *définition 14*.

Corollaire 4. *Autour de $t = 0$, on observe un événement Q et quatre événements D_1 .*

3.2 Etude locale de l'homotopie au voisinage de l'immersion $f_{t \simeq 0.56}$

Les points d'auto-intersection de cette figure ne sont que des points doubles transverses sauf les deux points de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{17}-5}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{17}-5}{2\sqrt{2}}, 0\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{17}-5}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{17}-5}{2\sqrt{2}}, 0\right)$.

Proposition 6. *Les points de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{17}-5}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{17}-5}{2\sqrt{2}}, 0\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{17}-5}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{17}-5}{2\sqrt{2}}, 0\right)$ sont des **points triples non transverses**.*

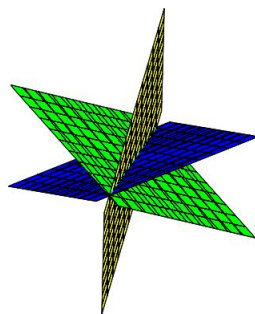
Démonstration. En raison d'une symétrie d'ordre 2, étudions seulement le point de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{17}-5}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{17}-5}{2\sqrt{2}}, 0\right)$.

On cherche les antécédents de ce point en résolvant, avec Maple (voir *Annexe*), le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{17}-3}{2} \cos(\varphi) + (1-h) \sin(\varphi) = \frac{\sqrt{17}-5}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{17}-3}{2} \sin(\varphi) + (1+h) \cos(\varphi) = -\frac{\sqrt{17}-5}{2\sqrt{2}} \\ h \sin(2\varphi) - \frac{\sqrt{17}-3}{2} \cos(2\varphi) = 0 \end{cases}$$

On trouve trois antécédents : $\left(0, -\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\sqrt{-2+2\sqrt{17}}, \arctan\left(\frac{\frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{-2+2\sqrt{17}} - \frac{1}{8}}{-\frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{-2+2\sqrt{17}} + \frac{1}{8}}\right) + \pi\right)$,
 $\left(\frac{1}{2}\sqrt{-2+2\sqrt{17}}, \arctan\left(\frac{\frac{1}{8}\sqrt{17} - \frac{1}{8}\sqrt{-2+2\sqrt{17}} - \frac{1}{8}}{-\frac{1}{8}\sqrt{17} - \frac{1}{8}\sqrt{-2+2\sqrt{17}} + \frac{1}{8}}\right) + \pi\right)$.

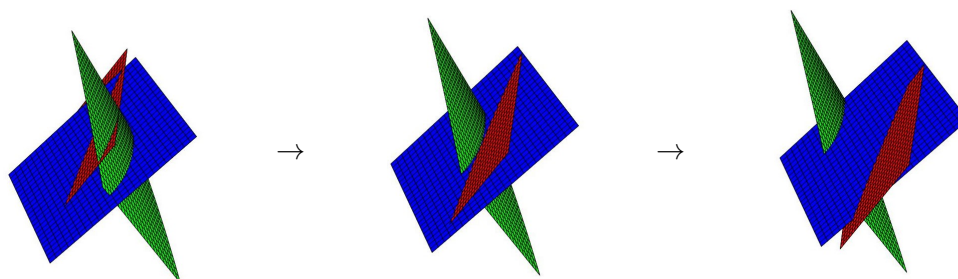
Toujours avec Maple, on calcule les plans tangents à la surface en l'image de ces trois points, et lorsqu'on fait afficher ces trois plans on trouve l'image ci-dessous (calculs en *Annexe*) :



Les trois plans tangents se coupent donc selon une droite.

Le point $\left(\frac{\sqrt{17}-5}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{17}-5}{2\sqrt{2}}, 0\right)$ est donc un point triple non transverse. \square

Si on effectue un zoom sur un voisinage du point $\left(\frac{\sqrt{17}-5}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{17}-5}{2\sqrt{2}}, 0\right)$, on obtient la suite de figures suivante :



Corollaire 5. *Autour de $t \simeq 0,56$, on observe deux événements T^- .*

3.3 Etude locale de l'immersion $f_{t=1}$

Les points d'auto-intersection de cette figure ne sont que des points doubles transverse sauf le point $(0,0,0)$.

Proposition 7. *Le point de coordonnées $(0,0,0)$ est un point double transverse.*

Démonstration. Etudions localement la figure autour de ce point.

Cherchons les antécédents de ce point. Pour cela, on résout le système :

$$\begin{cases} \cos(\varphi) + (1-h)\sin(\varphi) = 0 & (1) \\ \sin(\varphi) + (1+h)\cos(\varphi) = 0 & (2) \\ h\sin(2\varphi) - \frac{1}{2}\cos(2\varphi) = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow \frac{1}{h-1} = -1-h \\ (2) &\Rightarrow h = 0 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \tan(\varphi) = -1 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4} [\pi]$$

Il y a donc deux antécédents qui sont $\left(0, -\frac{\pi}{4}\right)$ et $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$

Cherchons maintenant les plans tangents de f_1 en $\left(0, -\frac{\pi}{4}\right)$ et $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$.

Pour cela, calculons les dérivées partielles de f_1 :

$$\text{On a : } \frac{\partial f_1}{\partial h} : \begin{pmatrix} h \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ \sin(2\varphi) \end{pmatrix},$$

$$\text{et } \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} : \begin{pmatrix} h \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) + (1-h)\cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) - (1+h)\sin(\varphi) \\ 2h\cos(2\varphi) + \sin(2\varphi) \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \frac{\partial f_1}{\partial h} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ et } \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix},$$

ainsi le plan tangent de f_1 en $\left(0, -\frac{\pi}{4}\right)$ a pour vecteur normal

$$\frac{\partial f_1}{\partial h} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \wedge \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De la même manière, on a :

$$\frac{\partial f_1}{\partial h} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ et } \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -2(1-\sqrt{2})-1 \end{pmatrix},$$

ainsi le plan tangent de f_1 en $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ a pour vecteur normal

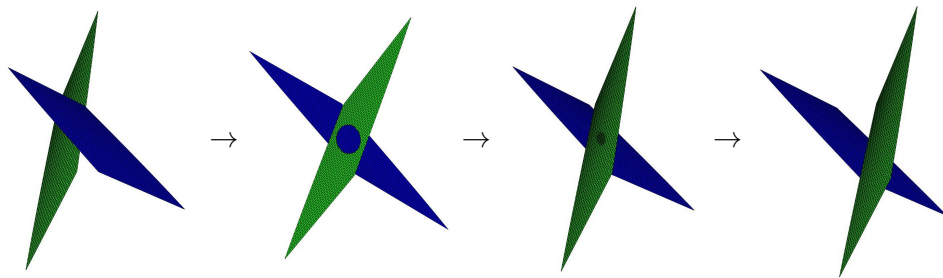
$$\frac{\partial f_1}{\partial h} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3\pi}{4} \end{pmatrix} \wedge \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les plans tangents des deux nappes de la surface au point $(0, 0, 0)$ ont des vecteurs normaux colinéaires et passent tous les deux par le point $(0, 0, 0)$, ils sont donc **confondus**.

Le point $(0, 0, 0)$ est donc un point double transverse. \square

Si on effectue un zoom au voisinage du point $(0, 0, 0)$, on obtient la suite de figures suivante :



L'ensemble des points d'auto-intersection est d'abord une courbe fermée simple puis il est réduit à un seul point. Cette suite de figures représente donc un **événement** D_2 , décrit dans la *définition 14*.

Corollaire 6. *Autour de $t = 1$, on observe un événement D_2 .*

4 Extension de (f_t) à toute la sphère \mathbb{S}^2

Dans la suite, on notera N et S les pôles Nord et Sud de la sphère \mathbb{S}^2 et \mathcal{N} et \mathcal{S} les pôles Nord et Sud de la sphère \mathbb{S}^3 .

Constatons que $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$ et le cylindre $C = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ sont homéomorphes. En effet, l'application

$$g : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

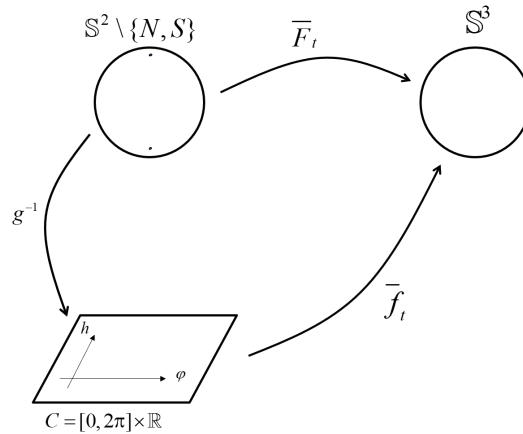
$$(\varphi, h) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\arctan(h)) \cos(\varphi) \\ \cos(\arctan(h)) \sin(\varphi) \\ \sin(\arctan(h)) \end{pmatrix}$$

est un homéomorphisme du cylindre C dans $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$.

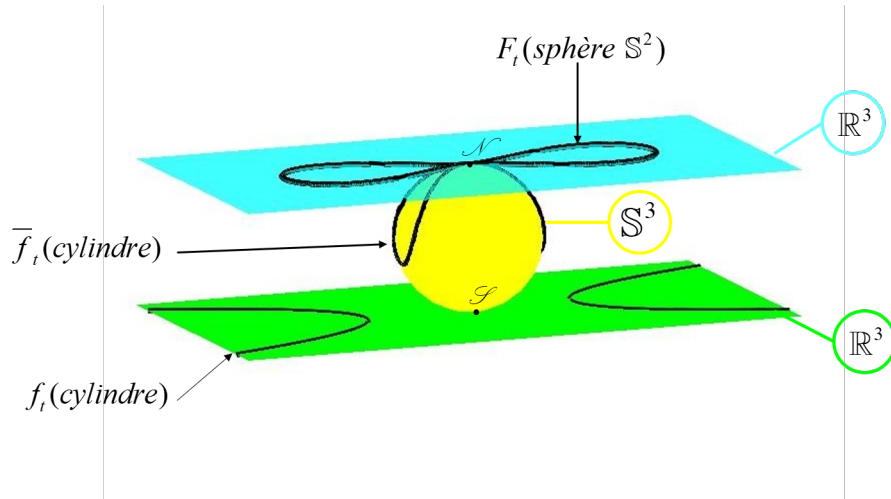
4.1 Principe général

On cherche à étendre la famille d'immersions $(f_t) \in I(C, \mathbb{R}^3)^{\mathbb{R}} \simeq (I(\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}, \mathbb{R}^3))^{\mathbb{R}}$ à toute la sphère \mathbb{S}^2 . Pour cela, on procède en quatre étapes :

1. On compose f_t par $\Pi_{\mathcal{N}}^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$, qui est la projection stéréographique inverse. On obtient alors $\bar{f}_t = \Pi_{\mathcal{N}}^{-1} \circ f_t : C = [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^3$.
2. On définit une application $\bar{F}_t : \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\} \rightarrow \mathbb{S}^3$ en posant $\bar{F}_t = \bar{f}_t \circ g^{-1}$, où g est l'homéomorphisme du cylindre C dans $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$.
3. On étend \bar{F}_t à tout \mathbb{S}^2 en posant $\bar{F}_t(N) = \bar{F}_t(S) = \mathcal{N}$. A la fin de cette troisième étape, on a défini une application $\bar{F}_t : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^3$.
4. On revient sur \mathbb{R}^3 au moyen d'une projection stéréographique : $\Pi_{\mathcal{S}} : \mathbb{S}^3 \setminus \{\mathcal{S}\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, et en posant : $F_t = \Pi_{\mathcal{S}} \circ \bar{F}_t : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$



Le schéma ci-dessous illustre le principe général de cette construction en 4 points :



Sur le schéma ci-dessus, le plan vert représente \mathbb{R}^3 et les deux courbes noires, notées \mathcal{C} , représentent l'image du cylindre par l'immersion f_t .

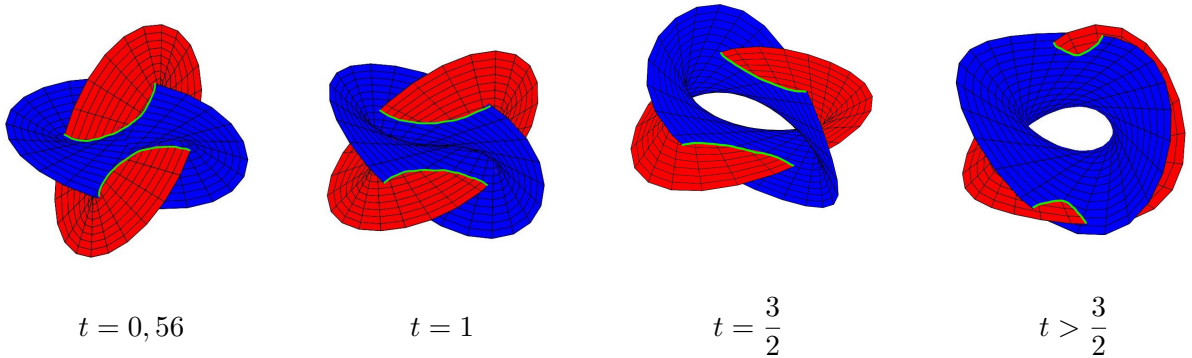
On applique le principe général à cette immersion du cylindre $f_t(\text{cylindre})$. Selon les quatre points du principe général (paragraphe 4.1), on obtient donc :

1. $\Pi_{\mathcal{N}}^{-1} \circ f_t(\text{cylindre}) = \bar{f}_t(\text{cylindre})$ qui est représenté, sur le schéma, par $\Pi_{\mathcal{N}}^{-1}(\mathcal{C})$, soit le "huit" privé de son "centre" sur la sphère jaune.
2. Par homéomorphisme entre le cylindre et $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$, le huit privé de son centre sur la sphère jaune représente aussi une image d'une immersion de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$. On la note $\bar{F}_t(\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\})$.
3. On pose $\bar{F}_t(N) = \bar{F}_t(S) = \mathcal{N}$ qui sera représenté par le centre du huit sur la sphère jaune.
4. On applique $\Pi_{\mathcal{F}}$ à l'image $\bar{F}_t(\mathbb{S}^2)$, cela est représenté, sur le schéma, par $\Pi_{\mathcal{F}}$ (huit sur la sphère jaune) soit le huit sur le plan bleu.
Ce huit représente dans \mathbb{R}^3 l'image d'une sphère par une immersion, c'est-à-dire ici une sphère "pincée".

4.2 Explication du dernier événement topologique

Regardons maintenant quelle est la conséquence sur les événements topologiques de l'application du principe général au cylindre.

Les surfaces obtenues pour $t > 0$ font apparaître, entre autre, un lieu de points doubles transverses (en vert sur les figures ci-dessous) :



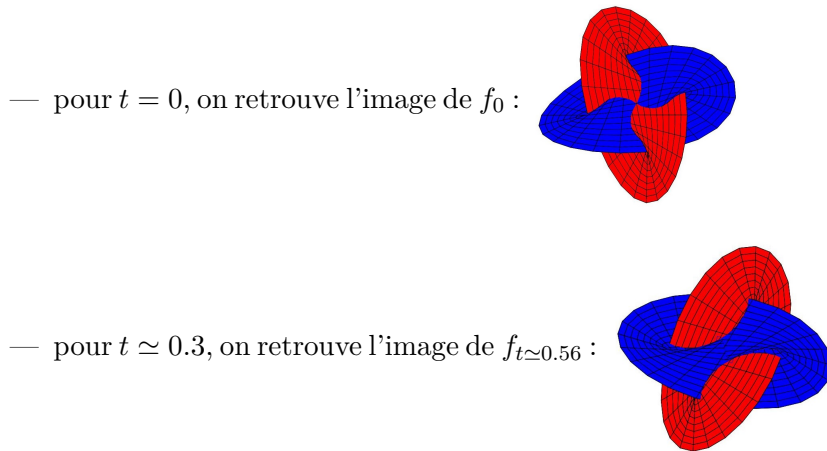
Avec cette famille d'immersions, on obtient deux courbes de points doubles (en vert ci-dessus), visibles sur la surface pour tout $t > 0$. Un cylindre n'ayant pas de points doubles, les frères Bednorz ont donc modifié la famille d'immersions afin de libérer la surface de ces points doubles d'auto-intersection. Ils ont considéré la nouvelle famille :

$$\tilde{f}_t : \begin{pmatrix} h \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t \cos(\varphi) + (1 - \frac{2}{3}|t| - h) \sin(\varphi) \\ t \sin(\varphi) + (1 - \frac{2}{3}|t| + h) \cos(\varphi) \\ h \sin(2\varphi) - \frac{t}{2} \cos(2\varphi) - \frac{2}{3}th \end{pmatrix}, \quad \forall (\varphi, h) \in [0, 2\pi] \times [-3, 3]$$

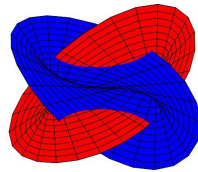
de telle sorte que $1 - \frac{2}{3}|t| \geq 0$ ie $t \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

On remarque que $\tilde{f}_0 = f_0$

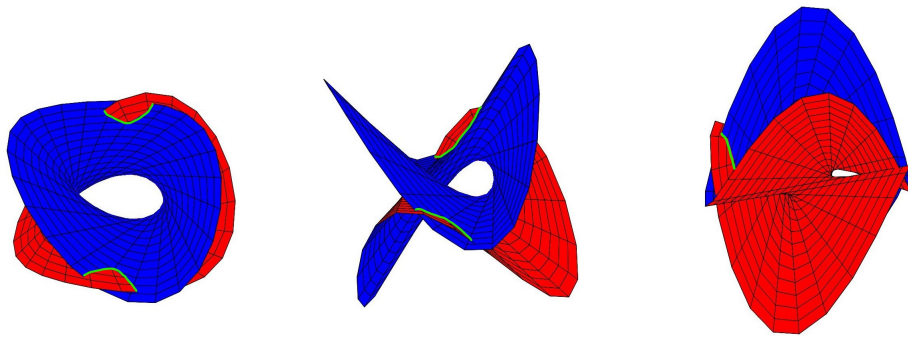
Les événements topologiques de la famille $(f_t)_{t \in \mathbb{R}}$ étudiés au dessus se retrouvent dans la famille $(\tilde{f}_t)_{t \in [-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]}$ avec juste un décalage dans le temps :



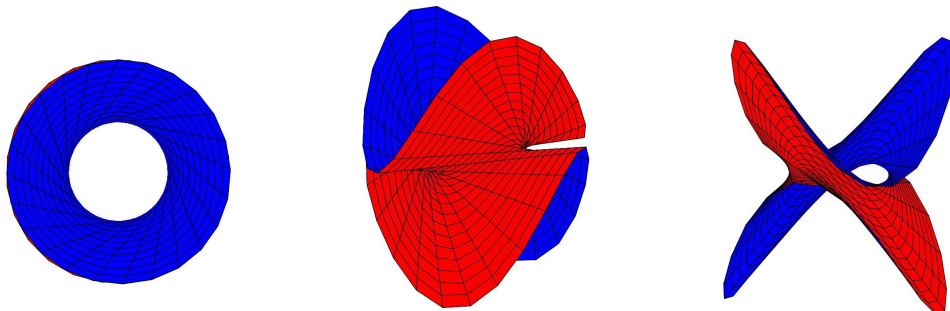
— pour $t \simeq 0.6$, on retrouve l'image de $f_{t=1}$:



Mais maintenant si on continue à faire augmenter le temps on obtient les figures suivantes :

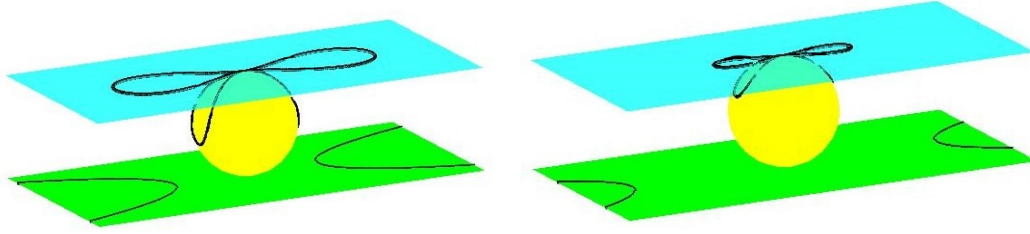


puis,

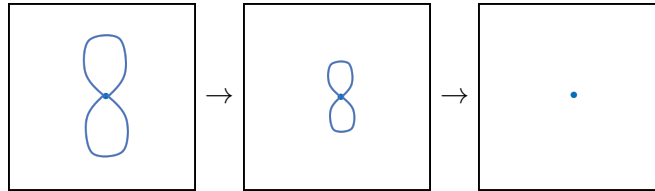


Sur la dernière figure, il n'y a plus de courbes vertes. En effet, quand t augmente, les deux lieux de points doubles s'éloignent. Sur la représentation, les courbes vertes disparaissent de la figure car le cylindre représenté est tronqué (ici $h \in [-3; 3]$). Mais, sur le cylindre réel, h décrit \mathbb{R} et donc les courbes de points doubles s'éloignent mais ne disparaissent pas.

De plus, lorsqu'on referme le cylindre, c'est-à-dire lorsque l'on prolonge \tilde{f}_t , immersion de $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}$, en une immersion de \mathbb{S}^2 , les courbes d'auto-intersection se transforment en un 8. Ce 8 va se transformer au cours du temps créant ainsi un nouvel événement topologique illustré dans le schéma ci-dessous.



Nous utilisons le même schéma que dans le paragraphe 4.1 mais cette fois-ci, les courbes noires dans le plan vert représentent les courbes vertes d'auto-intersection. Si on fait agir le principe général sur les courbes d'auto-intersection (comme cela est expliqué dans le paragraphe 4.1), on obtient un huit dans le plan bleu. Et lorsque ces courbes d'auto-intersection s'éloignent, le huit rapetisse jusqu'à devenir un point. Ainsi, lorsque l'on transforme le cylindre en sphère par le principe général, on crée un nouvel événement topologique et l'évolution de la courbe d'auto-intersection au cours de cet événement est la suivante :



On reconnaît à la fois :

- **un événement** D_2 car cela fait disparaître une courbe d'auto-intersection fermée
- **un événement** D_1 car il y a un lieu de points doubles en "X"

Nous noterons ce nouvel événement D_{12} . Il n'est, bien sûr, pas générique.

4.3 Description du retournement de la sphère des frères Bednorz

Dans le prolongement de f_t à F_t pour refermer le cylindre (4.1), le principe général fait intervenir $\Pi_{\mathcal{G}} \circ \Pi_{\mathcal{N}}^{-1}$. Mais, au lieu d'appliquer les projections stéréographiques $\Pi_{\mathcal{G}} \circ \Pi_{\mathcal{N}}^{-1}$, les frères Bednorz ont choisi de travailler directement sur des inversions et de remplacer $\Pi_{\mathcal{G}} \circ \Pi_{\mathcal{N}}^{-1}$, selon un principe similaire, par $g_2 \circ g_1$ avec :

$$g_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \frac{\sqrt[4]{1+x^2+y^2}}{y} \\ \frac{z}{(1+x^2+y^2)} \end{pmatrix}, \text{ qui va "raplatir" le cylindre}$$

$$g_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)} e^z \\ y \\ \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)} e^z \\ \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)} e^z \\ \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)} e^z \end{pmatrix}, \text{ qui va "replier" les bords.}$$

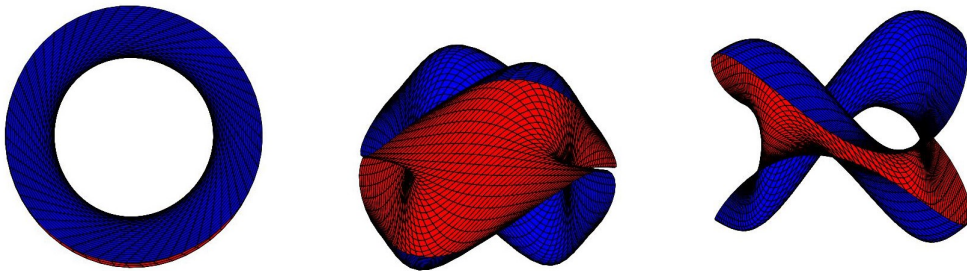
Ce choix est dicté par le fait que pour appliquer $\Pi_{\mathcal{S}} \circ \Pi_{\mathcal{N}}^{-1}$, il faut que le retournement du cylindre évite l'origine, ce qui n'est pas le cas.

On considère donc $\tilde{F}_t = g_1 \circ \tilde{f}_t \circ g^{-1}$ et pour $M \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$ avec $M = \begin{pmatrix} \cos(\arctan(h)) \cos(\varphi) \\ \cos(\arctan(h)) \sin(\varphi) \\ \sin(\arctan(h)) \end{pmatrix}$,

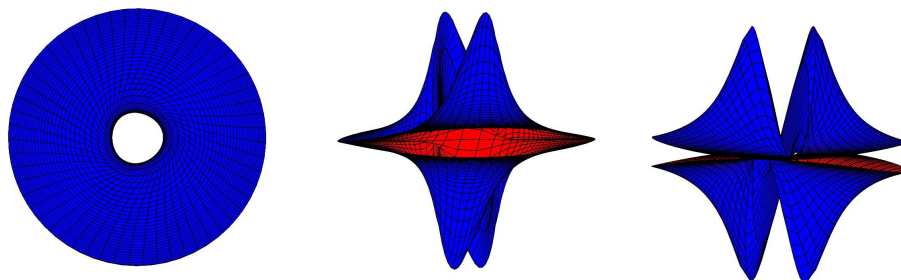
$$\tilde{F}_t(M) = g_1(\tilde{f}_t(\varphi, h)), \text{ soit } g_1 \begin{pmatrix} t \cos(\varphi) + (1 - \frac{2}{3}|t| - h) \sin(\varphi) \\ t \sin(\varphi) + (1 - \frac{2}{3}|t| + h) \cos(\varphi) \\ h \sin(2\varphi) - \frac{t}{2} \cos(2\varphi) - \frac{2}{3}th \end{pmatrix}$$

et avec $t = \frac{3}{2}$, on a $g_1 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \cos(\varphi) - h \sin(\varphi) \\ \frac{3}{2} \sin(\varphi) + h \cos(\varphi) \\ h \sin(2\varphi) - \frac{3}{4} \cos(2\varphi) - h \end{pmatrix}$, et on obtient les figures suivantes :

$\forall (\varphi, h) \in [0, 2\pi] \times [-3, 3]$:



mais comme h décrit \mathbb{R} , retraçons l'image de l'immersion précédente pour $h \in [-30, 30]$, on obtient :



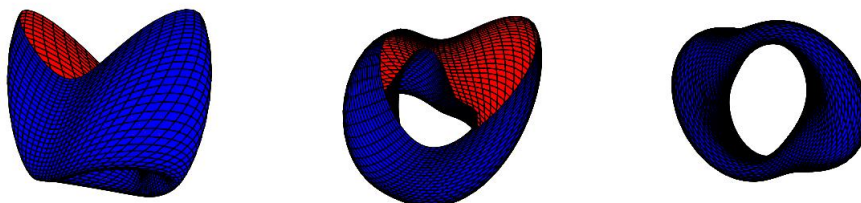
Cette surface va maintenant subir l'immersion g_2 .

Cela revient à faire subir $g_2 \circ g_1$ au cylindre, avec :

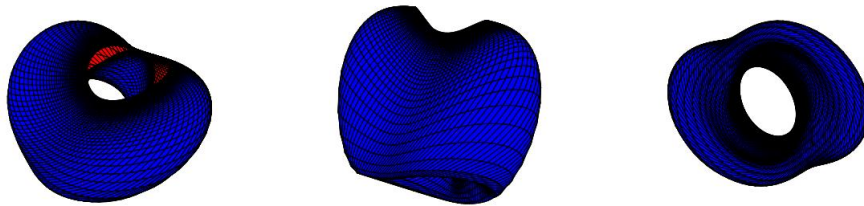
$$g_2 \circ g_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \\ \frac{2x e^{\frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}}{\sqrt{1+x^2+y^2} + x^2 + y^2} \\ \frac{2y e^{\frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}}{\sqrt{1+x^2+y^2} + x^2 + y^2} \\ \frac{(\sqrt{1+x^2+y^2} - x^2 - y^2) e^{\frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}}{\sqrt{1+x^2+y^2} + x^2 + y^2} \end{pmatrix}, \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

On trace donc l'image du cylindre par $g_2 \circ g_1$ à $t = \frac{3}{2}$, et on obtient les figures suivantes :

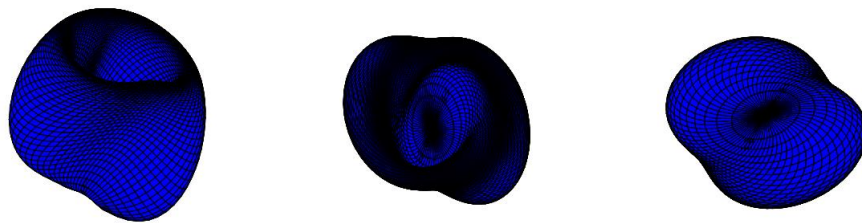
— pour $h \in [-3, 3]$:



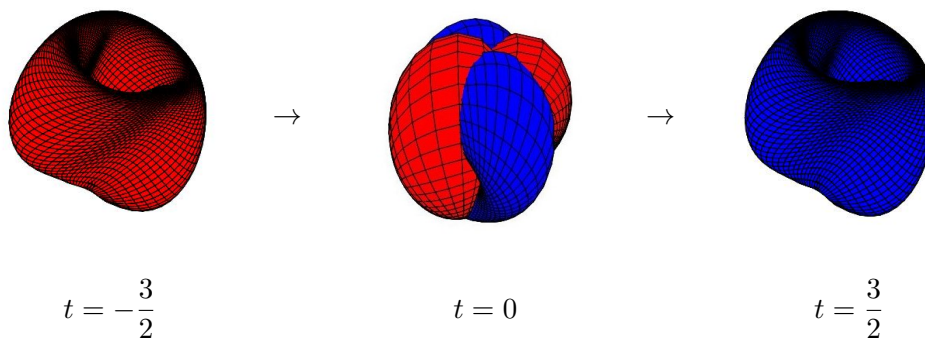
— pour $h \in [-15, 15]$:



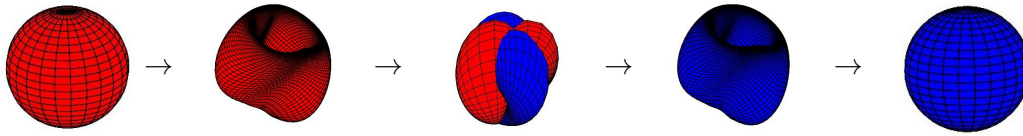
Afin que h parcourt \mathbb{R} , on pose $h = \tan(\tau)$ et on fait varier $\tau \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.
On obtient alors les figures suivantes :



La famille d'immersion (pour $t \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$) permet de passer de la figure centrale (autant bleue que rouge) à une immersion de la sphère, bleue à l'extérieur.
Les immersions faites en miroir (pour $t \in \left[-\frac{3}{2}; 0\right]$) permettent de passer de l'immersion de la sphère rouge à l'extérieur à la figure centrale.



Bien sûr, ces immersions, pour $t = \pm\frac{3}{2}$, sont régulièrement homotopes à une sphère "classique". C'est ainsi qu'on a retourné la sphère.



Bilan des événements topologiques

Au cours du retournement, il y a eu :

- à $t = 0$, un événement Q et quatre événements D_1
- à $t \simeq 0.3$, ce qui correspond à $t \simeq 0.56$ sur la première famille d'immersions, deux événements T^-
- à $t \simeq 0.6$, ce qui correspond à $t = 1$ sur la première famille d'immersions, un événement D_2
- à $t = \frac{3}{2}$, un événement D_{12}

Ainsi,

- pour $t = 0$, il y a 5 événements topologiques génériques
- pour $t < 0$, il y a 3 événements topologiques génériques
- pour $t > 0$, il y a 3 événements topologiques génériques
- pour $t = \frac{3}{2}$, il y a un événement topologique non générique
- pour $t = -\frac{3}{2}$, il y a un événement topologique non générique

soit 11 événements topologiques génériques et 2 non génériques.

ANNEXE

<pre> (1) > r0 := (sqrt(17) - 3) / 2; (2) > x0 := (sqrt(17) - 5) / 2; (3) > y0 := -x0; (4) > x := r*cos(a) + (1 - h)*sin(a); (5) > y := r*sin(a) + (1 + h)*cos(a); (6) > z := h*sin(2*a) - (1/2)*cos(2*a); (7) > x1 := subs(r = 0, x); (8) > y1 := subs(r = 0, y); (9) > z1 := subs(r = 0, z); (10) > eq1 := x1 = x0; (11) > eq2 := y1 = y0; (12) > eq3 := z1 = 0; (13) > sol := solve([eq1, eq2, eq3], [a, h]); (14) > sol := [a = -1/4*pi, h = 0] [a = arctan(1/8*sqrt(17) + 1/4*RootOf(1 - sqrt(17) + 2*_Z^2)) - 1/8*sqrt(17) + 1/4, h = RootOf(1 - sqrt(17) + 2*_Z^2)]; </pre>	<pre> (14) > simplify(subs(S1, [x1 - x0, y1 - y0, z1])); (15) > s2 := soI(2); (16) > s2 := [a = arctan(1/8*sqrt(17) + 1/4*RootOf(1 - sqrt(17) + 2*_Z^2)) - 1/8*sqrt(17) + 1/4 + 1/4*RootOf(1 - sqrt(17) + 2*_Z^2), h = RootOf(1 - sqrt(17) + 2*_Z^2)]; (17) > s2J := aIvalues(s2); (18) > s2J := [a = arctan(1/8*sqrt(17) + 1/8 + 1/8*sqrt(-2 + 2*sqrt(17)) - 1/8, h = 1/2*sqrt(-2 + 2*sqrt(17))], a = arctan(1/8*sqrt(17) - 1/8*sqrt(-2 + 2*sqrt(17)) - 1/8, h = -1/2*sqrt(-2 + 2*sqrt(17))]; (19) > S2 := a - arctan(1/8*sqrt(17) + 1/8 + 1/8*sqrt(-2 + 2*sqrt(17)) - 1/8) + pi*h - 1/2*sqrt(-2 + 2*sqrt(17)); (20) > simplify(subs(S2, [x1 - x0, y1 - y0, z1])); (21) > S3 := s2/2; (22) > S3 := [a = arctan(1/8*sqrt(17) - 1/8*sqrt(-2 + 2*sqrt(17)) - 1/8, h = 1/2*sqrt(-2 + 2*sqrt(17))], a = arctan(1/8*sqrt(17) + 1/8*sqrt(-2 + 2*sqrt(17)) - 1/8, h = -1/2*sqrt(-2 + 2*sqrt(17))]; (23) > simplify(subs(S3, [x1 - x0, y1 - y0, z1])); (24) > evaI(S2); (25) > evaI(S3); (26) > evaI(S1); (27) > with(Linealgebra); (28) > Y1 := (diff(x1, a), diff(y1, a), diff(z1, a)); </pre>
--	---

```

(25)
V1 := 
$$\begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{2}\sqrt{17}-\frac{3}{2}\right)\sin(a) + (1-h)\cos(a) \\ \left(\frac{1}{2}\sqrt{17}-\frac{3}{2}\right)\cos(a) - (1+h)\sin(a) \\ 2h\cos(2a) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{17}-\frac{3}{2}\right)\sin(2a) \end{bmatrix}$$

> W1 := diff(x1,h), diff(y1,h), diff(z1,h);
(26)
W1 := 
$$\begin{bmatrix} -\sin(a) \\ \cos(a) \\ \sin(2a) \end{bmatrix}$$

> N := CrossProduct(V1, W1);
(27)
N := 
$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\sqrt{17}-\frac{3}{2}\right)\cos(a) - (1+h)\sin(a) - \left(2h\cos(2a) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{17}-\frac{3}{2}\right)\sin(2a)\right)\cos(a) \\ -\left(\frac{1}{2}\sqrt{17}-\frac{3}{2}\right)\sin(a) + (1-h)\cos(a) \\ \left(-\left(\frac{1}{2}\sqrt{17}-\frac{3}{2}\right)\sin(2a) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{17}-\frac{3}{2}\right)\sin(a) - \left(-\left(\frac{1}{2}\sqrt{17}-\frac{3}{2}\right)\sin(a) + (1-h)\cos(a)\right)\cos(a) + \left(\left(\frac{1}{2}\sqrt{17}-\frac{3}{2}\right)\cos(a) - (1+h)\sin(a)\right)\sin(a) \right) \end{bmatrix}$$

> N1 := subs(S1, N);
(28)
N1 := 
$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

> N2 := evalf((subs(S2, N)));
(29)
N2 := 
$$\begin{bmatrix} 0.2212387142 \\ 2.429607879 \\ -2.225295715 \end{bmatrix}$$

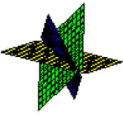
> N3 := evalf((subs(S3, N)));
(30)
N3 := 
$$\begin{bmatrix} -2.429607882 \\ -0.2212387105 \\ 2.225295716 \end{bmatrix}$$


```

```

> P1 := N1[1]*(u-x0) + N1[2]*(v-y0) + N1[3]*w;
> P2 := N2[1]*(u-x0) + N2[2]*(v-y0) + N2[3]*w; P3 := N3[1]*(u-x0) + N3[2]*(v-y0) + N3[3]*w
> P1 := -1/2*sqrt(2)*(u-1/4*(sqrt(17)-5)*sqrt(2)) + 1/2*sqrt(2)*(v+1/4*(sqrt(17)-5)*sqrt(2))
(31)
> P2 := 0.2212387142*u + 0.5520922912*(sqrt(17)-5)*sqrt(2) + 2.429607879*v - 2.225295715*w
> P3 := -2.429607882*u + 0.5520922929*(sqrt(17)-5)*sqrt(2) - 0.2212387105*v + 2.225295716*w
> with(plots):
> plot1 := implicitplot3d(P1, u=x0-0.5..x0+0.5, v=y0-0.5..y0+0.5, w=-0.5..0.5, color=yellow, numpoints=1000);
> plot2 := implicitplot3d(P2, u=x0-0.5..x0+0.5, v=y0-0.5..y0+0.5, w=-0.5..0.5, color=blue, numpoints=1000);
> plot3 := implicitplot3d(P3, u=x0-0.5..x0+0.5, v=y0-0.5..y0+0.5, w=-0.5..0.5, color=green, numpoints=1000);
> display(plot1, plot2, plot3);

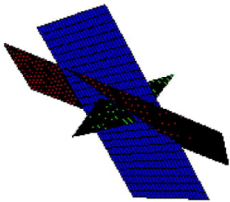
```



```

> d1 := plot3d(x1,y1,z1, a = -Pi/4..Pi/4, h=-0.1..0.1, color=green);
> d2 := plot3d(x1,y1,z1, a = rhs(S2[1]) - 0.1..rhs(S2[1]) + 0.1, h = rhs(S2[2]) - 0.1..rhs(S2[2]) + 0.1, color=red);
> d3 := plot3d(x1,y1,z1, a = rhs(S3[1]) - 0.1..rhs(S3[1]) + 0.1, h = rhs(S3[2]) - 0.1..rhs(S3[2]) + 0.1, color=blue);
> display(d1, d2, d3);

```



Références

- [1] S. Smale. A classification of immersions of the two-sphere. *Transactions of the American Mathematical Society*, 90 :281–290, 1959.
- [2] Adam et Witold Bednorz. Analytic sphere eversion with minimum of topological events. <https://arxiv.org/pdf/1711.10466.pdf>, 2017.
- [3] H. Whitney. On regular closed curves in the plane. *Comput. Math.*, 4 :276–284, 1937.
- [4] F. Apery. *Tohoku Math. J.*, 44 :103–150 projecteuclid.org/euclid.tmj/1178227379, 1992.
- [5] B. Morin et J. Petit. *C. R. Académie des Sciences Paris*, 287, pages 767–770 ; 791–794 gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6238948x, 1978.